UC-NRLF
$B 17 213

LIBRARY

OF THE

UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Received MAY 10 1893 , *189*

Accessions No. 51742 . *Class No.*

Fr[illegible]

Value of no.

Leitfaden

für das

Rechnen in der Elementarschule

nach den

Grundsätzen einer heuristischen Methode.

Ein

methodischer Beitrag zum erziehenden Unterricht

von

A. W. Grube.

Sechste verbesserte Auflage.

(Mit Berücksichtigung der neuen Maß- und Gewichtsordnung.)

Berlin, 1881.

Verlag von Theod. Chr. Fr. Enslin.

(Adolph Enslin.)

LB1534
G7

„Der Schüler ſoll vermittelſt des Schulunterrichts nicht bloß anſchauen und denken lernen, ſondern zum Bewußtſein eines Zweckes anſchauen, d. h. beobachten, und mit Bewußtſein des Zuſammenhanges denken, d. h. begreifen. Unſere Meinung iſt, daß die Kinder in unſern Schulen beides ſehr wenig lernen.“

Dr. Chr. Weiß.

51742

Vorwort

zur ersten Auflage.

Obwohl unsere elementar-pädagogische Literatur, der man überhaupt keinen Mangel an Fruchtbarkeit vorwerfen kann, namentlich im Rechnen eine Überfülle von Schriften erzeugt hat, so möchte ein Büchlein, wie das hier dargebotene, gerade mit diesem vorhandenen Reichtume seine Erscheinung rechtfertigen können. Wir wollen uns sogleich näher erklären.

Pestalozzi hat uns wohl von der schlechten objektiven (der abstrakt-wissenschaftlichen) Methode im Elementarunterrichte befreit, und zu der naturgemäß-subjektiven (psychologischen) hinübergeführt; ob wir aber nicht, von der einen Seite uns abwendend, die Fahne der „Anschauung" mit etwas zu großer Heftigkeit nach der anderen Seite hinübergetragen haben, und einem neuen Feinde zugezogen sind? Ob wir nicht bei dem ewigen Geschrei nach „Anschaulichkeit" das eigentliche Anschauen allgemach verloren und statt des objektiven einen subjektiven Formalismus gewonnen haben? Wir brauchen diese Fragen hier nicht zu beantworten, da sie bereits von gewichtigeren und kompetenteren Stimmen laut und vernehmlich genug bejaht sind, da es Thatsache ist, daß wir uns mehr oder weniger in die einseitig-subjektive Methode verfahren haben. Wir wollen damit keineswegs den wirklichen vielseitigen Fortschritten in der methodischen Bearbeitung der einzelnen Lehrzweige, und dem Werte der errungenen Virtuosität in der Methodik überhaupt zu nahe treten, aber zum Besten der Sache dürfen auch ihre Schattenseiten nicht verschwiegen werden, und — eben bei dem Virtuosenthum kommt in der Regel das Objekt schlecht weg. Kehren wir darum von dem etwas über das Ziel hinausgefahrenen Gange eine Strecke zurück, und fassen wir das Ding auch einmal von seiner anderen Seite an, so daß nicht bloß dem anschauenden Subjekte, sondern auch dem angeschauten Objekte sein Recht werde, und aus der gleichmäßigen Berücksichtigung beider eine konkret-objektive Methode zu Stande komme. Es hat sich ja besonders an dieser „reichen" Literatur des Rechnens gezeigt, wie das einseitige Streben nach Anschaulichkeit das arithmetische Objekt in eine Menge von Teilen und Teilchen zerlegt, daß über dieses anatomische Methodisieren das Leben des Dinges selbst entflohen, so wie von Seiten des Subjekts die freie Übersicht und die selbstthätige Ent-

wickelung des dargebotenen Stoffes erstickt ist. In der Einleitung, welche dem Lehrgange als Begründung desselben vorangestellt ist, wird man das eben ausgesprochene Urteil motiviert finden. Über diese Einleitung aber ist hier noch ein Wort zu sagen. Man wird sie für den Elementarlehrer zu wissenschaftlich, zu schwer finden. Für den Anfänger ist sie aber auch nicht geschrieben — dieser mag sich an den rein praktischen Teil halten — sondern für den im Felde seiner Literatur wohlbewanderten, für eine tiefere psychologische Erörterung gereiften Elementarlehrer, so wie andrerseits für den Seminarlehrer und Theoretiker vom Fach, welchen die Sache angeht, und der mit Recht, wenn ihm etwas Neues in der Praxis geboten wird, eine Aufzeigung des Prinzipes fordert. Aber auch hiervon abgesehen, so ist unsere feste Meinung, daß alle unsere praktischen Handbücher mit ihrem Stoffe auch jedesmal eine Dosis Theorie verabreichen sollten, damit die Breite der Praxis nicht gar zu breit, und indem sie auf einem Punkte zusammengefaßt, auch *begriffen* würde. Es ist zwar sehr viel von „Anschauen" und „anschaulichem Unterrichte" gesprochen, aber von dem wesentlichen psychologischen Prozesse der Anschauung sehr wenig gesagt worden, wie denn nach der anderen Seite hin bei Aufstellung einer Methode alle Grundsätze befolgt wurden, nur der eine nicht: *Der Gegenstand ist zugleich seine Methode!* Es ist also dieses einseitige Festhalten des subjektiven Standpunktes, welches die Menge der sogenannten Methoden erzeugt, und jenes endlose Experimentieren hervorgebracht hat, das um so freieren Spielraum findet, je weniger man von der Natur des Objektes Notiz nimmt, und je mehr man bei dem oberflächlichen „Anschaulich" stehen bleibt. Hätten manche Schriftsteller in der Elementar-Methodik sich etwas mehr Mühe gegeben, das Spezielle ihrer Praxis auf ein Allgemeines zurückzuführen, und aus einem Prinzip heraus ihre Lehrgänge zu konstruieren: sie würden uns das nicht als etwas „Neues, Eigentümliches" als „Methode" angepriesen und durch den Druck veröffentlicht haben, was schon längst, wenn auch in etwas anderer Form, vorhanden war, was bloß subjektives Verfahren, nicht Methode, sondern *Manier* ist. Wo aber die Praxis nicht auf das Bewußtsein eines sie bedingenden, ihr Leben und Gestalt verleihenden (theoretischen) Grundes gebaut wird, da bleibt sie eine *rohe Praxis*, welche als *bloß* subjektiv durchaus keine allgemeinere objektive Geltung in Anspruch nehmen sollte. Man trete doch einmal näher an die täglich mehr wachsende Menge von Rechenbüchern heran, und zähle diejenigen, welche den Namen eines neuen und eigentümlichen Buches verdienen, wie viel da herauskommen? Woher anders ist das aber zu erklären, als daraus, daß das Einzelne ohne sein Allgemeines hingestellt, seine Berechtigung und Notwendigkeit im Ganzen des Unterrichts nicht nachgewiesen, kurz, daß der Lehrgang nicht begründet wird. Wie sollen aber die Elementarlehrer anders zur Selbständigkeit und freien Beherrschung ihres Stoffes gelangen, wenn sie nicht durch die von ihnen benutzten Handbücher selbst herangebildet, und von der Mannigfaltigkeit ihrer Thätigkeit zu der Einheit des Begriffes hingeführt werden? Die Seminarbildung, wie sie es auch unter den obwaltenden Verhältnissen nicht anders vermag, kann eben nur die rohe Praxis geben, dem Streben des Individuums es überlassend, wie es sich in derselben zum Selbstbewußtsein herausbilde.

Manche greifen dann wohl im Gefühl des unbefriedigten Bedürfnisses zu — einem Lehrbuche der Psychologie, was freilich meist ein fruchtloses Beginnen bleibt, weil ihnen hier angesonnen wird, sich aus ihrer gewohnten Anschauungswelt auf einmal in ein Gebiet reiner Abstraktion zu versetzen, ohne daß beide Sphären durch die nötigen Mittelglieder verbunden werden. Wäre es nun da nicht ganz natur- und zweckgemäß, wenn man der auch für den Elementarlehrer nicht abzuweisenden Anforderung eines tieferen Eindringens sowohl in das Wesen des zu lehrenden Gegenstandes wie des zu belehrenden Subjektes dadurch begegnete, daß die Bücher, welche ihm die Lehrgänge an die Hand geben, zugleich die Psychologie dafür darreichten, und so die Erkenntnis des Allgemeinen in seiner Einheit mit dem besonderen Stoffe zu einer wahrhaft konkreten und fruchtbringenden machten? *So hätte der Lehrer in einer allseitigen und eindringenden Präparation auf das einzelne Lehrobjekt zugleich das Material für sein allgemeineres theoretisches Studium, dessen er für seine Freiheit im Lehren unabweislich bedarf.* Dies zur Rechtfertigung der Einleitung.

Über den Lehrgang selbst macht sich der Verfasser gleichfalls auf den Vorwurf gefaßt, daß er für die Meisten eine zu große Allseitigkeit voraussetze, und daß, weil diese fehle, eine Trennung und Sonderung der Operationen noch immer notwendig sei. Es ist freilich bequemer, in dem schon breit und festgetretenen Gleise fortzuwandern, als einen neuen Weg einzuschlagen, der überall ein freies Umherschauen und selbstthätiges Rekognoszieren des ganzen Terrains verlangt, weshalb Mancher den hier vorgeschlagenen Gang, eben seiner Eigentümlichkeit wegen, ruhig auf sich beruhen lassen wird. Aber wir setzen seinen Vorzug gerade darin, daß er den Lehrer zur Selbstthätigkeit auffordert, und zur Freithätigkeit anleitet, dergestalt, daß dieser das Ganze von A bis Z *sich selbst zu konstruieren im Stande ist, sobald er sich der zum Grunde liegenden Idee bemächtigt hat.* Wir finden gerade in jener Teilung und Sonderung der Übungen das Hindernis einer freien Übersicht und selbständigen Behandlung des Stoffes, und wissen aus Erfahrung, wie selbst gewandte und fähige Lehrer über die große Menge und Verschiedenheit der Übungen in unsern sonst ganz trefflichen Anweisungen (wie die von Scholz und Diesterweg) Klage führen, da hier ein so weit ausgesponnenes Material geboten wird, wie es bei der in der Regel verstatteten Zeit durchaus nicht bewältigt werden kann*). Diese Zersplitterung

*) O. Schulz sagt in der Anzeige der fünften Auflage des Scholzischen Rechenbuches (Brandenb. Schulblatt, 2. Heft 1842): „Was Referent daran aussetzen möchte, ist die große Ausführlichkeit, die gewiß manchen Lehrer abhält, das Ganze durchzuarbeiten und seinen Rechenunterricht danach einzurichten. Was unsern Schulen am meisten Not thut, das ist ein Leitfaden, der auf zehn bis zwölf Bogen den Gang der Elementarübungen im Rechnen vollständig andeutet und dann die Grundsätze, auf denen das angewandte Rechnen beruht, anschaulich an einzelnen Beispielen entwickelt und in einer solchen Allgemeinheit aufstellt, daß der Schüler von selbst einsieht, wie alle einzelnen Rechnungsarten zu behandeln sind."

Verf. freut sich, einen solchen Gewährsmann für das Prinzip seiner Schrift zu haben, wie er überhaupt hier dankbar des Interesses und Beifall's

des arithmetiſchen Inhalts iſt aber eine notwendige Folge der bloß ſubjektiven Methode.

Wir haben nun dieſe verlaſſen, und dem Objekte eine einfachere, lediglich durch *ſeine eigene Natur bedingte* Gliederung gegeben, dabei aber durch Zuſammenfaſſen des Extenſiven jede einzelne Stufe reicher und intenſiv gehaltvoller gemacht. Nur ſo können wir der immer mehr zunehmenden, an jede Schule ohne Ausnahme herandringenden Maſſe des Wiſſens Herr werden, daß wir die Teile deſſelben zu möglichſter Einfachheit organiſieren, und durch Intenſität im Einzelnen die Extenſität des Vielen zu erſetzen ſtreben. So haben wir — und es mag Vielen anfangs ſonderbar vorkommen — das Spezies rechnen in ganzen und Bruchzahlen, das früher faſt die ganze Elementarſchulzeit in Anſpruch nahm, auf zwei halbjährige Kurſe reduziert, dafür aber auch durch eine vorangegangene allſeitige Übung der Anſchauungskraft und Entwickelung derſelben zu freier Beobachtung ein Material gewonnen, das nun bloß nach ſeinen einzelnen Seiten hin auseinander gelegt zu werden braucht, und weil es im Ordnen nicht erſt gewonnen wird, wie das früher geſchah, eine verhältnismäßig ſehr kurze Zeit dafür in Anſpruch nimmt. Es iſt mit dieſem Spezies-Rechnen etwa ſo, wie mit dem Klavierſpielen. Wenn der Schüler nach erlangter Notenkenntnis und dem Spielen von einigen Vorübungen ſogleich zu Handſachen übergeht, ſo kann er wohl 3 Jahre lang ſpielen, bevor er eine mittelmäßige Sonate rein und präzis vortragen lernt, während ein anderer, der $2^1/_2$ Jahr Kalkbrenner's Klavierſchule durchgearbeitet hat, im letzten halben Jahre alles das, und bedeutend fertiger ſpielt, woran jener Jahrelang ſich abmühte.

Mit dieſer intenſiven Bildung der Anſchauung hängt die Bildung zur Sittlichkeit auf das Innigſte zuſammen. Nur aus der *Vertiefung in das Lehrobjekt* kann die Liebe zu demſelben entſtehen, und nur das, was der Menſch liebt, *will* er auch. Nur *der* Unterricht wirkt lebendig auf das Gemüt des Schülers, welcher mit dem Verſtande zugleich den Willen erobert, und alle Anſchauungsmethoden ſind ſo lange „unpraktiſch", als ſie mit dem Anſchauen nicht auch das *Anſchauenwollen* erzeugen. Wir haben darum das Prinzip der Sittlichkeit als das allein Maßgebende für die Erziehung wie für ihren weſentlichſten Teil, den Unterricht, an die Spitze unſerer Entwickelung geſtellt. Die, welche die chriſtlich-religiöſe Bildung als die Zwecke der Volksſchule aufſtellten, kamen nicht wenig in Verlegenheit, beim Rechnen nachzuweiſen, wie dieſer Unterrichtsgegenſtand jenem Hauptzwecke zu dienen im Stande ſei. So hat man denn die religiöſe oder beſſer die ſittliche Seite des Rechnens in allem Anderen geſucht, nur nicht im Rechnen ſelbſt, und es iſt gar nicht ſo lange her, daß man dem gefühlten Bedürfniſſe abzuhelfen glaubte, indem man berechnen ließ, wie viel Kinder Israels durch's rote Meer paſſierten, und wie viel Egypter elendiglich darin umkamen — oder wie viel ein Sänfer alljährlich ſeinem Geldbeutel Schaden zufügt u. ſ. w. — um doch in das weltliche Rechnen

---

erwähnen muß, mit dem hochgeachtete Pädagogen, wie Hentſchel, Weiß und Dieſterweg, denen Verf. teilweis das Manuſkript mitteilte, ſelbiges beehrten, und zur Herausgabe deſſelben ermunterten.

etwas religiöse Salbung zu bringen. Hätte man mehr, als geschehen ist, das Prinzip der Sittlichkeit zum Maßstab für die Konstruktion der einzelnen Methoden genommen, so würde ebensowohl der Gegenstand wie die Psychologie dabei gewonnen haben. Der abstrakte Grundsatz: Entwickele allseitig die geistige Kraft! oder: Bilde den Schüler zur Selbstthätigkeit! ist leere, hohle Form, und für die Entwickelung des Objektes ganz unfruchtbar. Man fragt da vergebens: Wie soll die Selbstthätigkeit entwickelt werden? Nach welchem Ziele hin und zu welchem Zwecke?

Was endlich den Titel unseres Büchleins betrifft, so haben wir ihn absichtlich als „Rechnen für die Elementarschule" gefaßt, einmal, weil der Begriff des „elementaren Rechnens" ein viel zu schwankender ist, zweitens um von vorn herein den Kreis fest zu bestimmen, in welchem wir uns bewegen wollen — nämlich die das Schulalter vom 6ten bis 10ten Jahre umfassende Elementar- oder Grundschule, welche sich ganz wesentlich von der Volks- wie von den niedern Klassen der Bürgerschule unterscheidet, obschon dieser Unterschied noch nicht überall äußerlich hervortritt. Es ist endlich einmal Zeit, daß die heillose Begriffsverwirrung in der Unterscheidung der verschiedenen Schulen ein Ende nehme, und daß auch die Praxis sich ein wenig dem akkomodiere, was mit lobenswertem Bemühen von mehreren unserer Pädagogen über diesen Punkt bereits auseinander gesetzt ist. Die oben gerügte Zersplissenheit des Stoffes in unseren Rechenbüchern ist mit eine Folge davon, daß sie für „Lehrer und Schüler, für Elementar- und Volksschulen für Bürgerschulen und die unteren Klassen der Gymnasien, wie für Schullehrer-Bildungsanstalten", und wie die Anstalten sonst noch heißen mögen, gleich brauchbar sein wollen. Was aber der Elementarschüler absolviert hat, das braucht der Bürgerschüler nicht mehr, der Volksschüler ist wieder ein anderes Subjekt als der Quintaner eines Gymnasiums, und der Lehrer vollends kann nicht aus seinem Lehrgange die Theorie des Addierens und Subtrahierens lernen sollen. Es muß darum auch hier die Schule in ihrem Gesammt-Organismus begriffen werden, damit jeder einzelne Teil als Organ des Ganzen sich bethätige, eins durch das andere gedeihe und reife. —

Damit Gott befohlen! Mögen diese Bogen einen lebendigen Impuls geben zur frischen Fortbildung unserer Methodik! Entwickelung ist ja überhaupt nur da, wo Gegensätze sich bilden. —

Berlin, den 12. August 1842.

Der Verfasser.

Vorwort

zur vierten Auflage.

Als mir der Herr Verleger meldete, daß die 3. Auflage dieſes Werkchens vergriffen ſei, kam mir der Gedanke, es einer gründlichen Durch- und Umarbeitung zu unterwerfen. Bei näherer Prüfung jedoch ergab ſich alsbald, daß dieſes nicht wohl thunlich, ja auch nicht einmal rätlich ſei. Wollte ich die ſtrenge Konſequenz des Lehrganges mildern, manche ſcharfe Ecken und Kanten abſchleifen, das Ganze mehr mit der üblichen und anerkannten Methode des elementaren Rechnens in's Gleichgewicht ſetzen: ſo würde ich dem Büchlein ſeine Eigentümlichkeit, ſeinen Charakter, ſein Leben nehmen. Es hat eben einen oppoſitionellen Geiſt, der, wie ich mich deſſen noch wohl erinnere, wie ein friſcher ſcharfer Nordoſt hineinwehete in die lau und matt gewordene Luft der endlos ſich ausbreitenden methodiſchen Handbücher der dreißiger und vierziger Jahre und durch den einſchneidenden Gegenſatz Veranlaſſung gab, daß man ſich mehr zuſammenfaßte und zur Aufſtellung eines einfacheren Lehrganges entſchloß. Ich glaube ohne Unbeſcheidenheit ſagen zu dürfen, daß dieſes Büchlein wenigſtens mit dazu geholfen hat, daß man ſich einzelne Zahlräume (von 1 — 10, 10 — 20, 20 — 100) beſtimmter abſteckte, und anſtatt gleich in's Weite vorzuſchreiten, dieſe erſt gründlicher durcharbeitete; daß man ferner Übungen, die früher weit auseinander geriſſen waren, nun in der allſeitigen Anſchauung einer und derſelben Zahl auf die einfachſte und anſchaulichſte Weiſe vereinigte. Strebſame Lehrer und erfahrene Methodiker wie Dagott, Heuner, Schmidt, Scholz, Zähringer ꝛc. gingen, wenn auch ſelbſtverſtändlich mit eigentümlichen Abweichungen, auf den von mir aufgeſtellten Lehrgang ein, um methodiſch ſorgfältig und ſauber ausgeführte Arbeiten wie die „Übungsſchule im bürgerlichen Rechnen“ von H. Blancke (1. und 2. Heft) und die Rechenfibel von O. Mießler (1864 in 2. Auflage erſchienen) geben Zeugnis, daß ich nicht bloß negative Kritik geübt habe.

Wer ſelber denken, mit eigenen Augen ſehen lernen will, der muß *vergleichen* lernen, *Gegenſätze* anſchauen und eben deshalb *Verſchiedenes* ſehen und beobachten. An guten handlichen praktiſchen Rechenwerken, welche alle Extreme ausgeglichen und von entgegenſtehenden Richtungen das Brauchbarſte und Beſte ſich angeeignet haben, fehlt es uns nicht. So mag denn auch ein Werkchen, das wegen ſeines entſchiedenen Gegenſatzes zum Beſtehenden zur Prüfung und ſelbſtändigen Beobachtung auffordert, allen geiſtig geweckten Elementarlehrern, die nicht blindlings ihren Führern folgen wollen, immer noch von Nutzen ſein.

Es sind nun 22 Jahre verflossen, seitdem dieser Leitfaden an's Licht getreten ist. Das Büchlein war mein pädagogisches Erstlingswerk. Es erinnert mich und wohl auch manchen meiner Freunde an jene glückliche Zeit jugendkräftigen Strebens, wo man mit fröhlichem Mut steile und ungebahnte Pfade wählt und sie der bequemeren sicheren Fahrstraße vorzieht, weil sie die eigene Kraft mehr herausfordern und zum Bewußtsein bringen.

Hard bei Bregenz, Neujahr 1865.

A. W. Grube.

Vorwort

zur fünften Auflage.

Nun ist bereits mehr als ein Menschenalter verflossen, seitdem ich das Vorwort zur ersten Auflage dieses Werkchens geschrieben. Obwohl ich dasselbe in der Absicht und auch in der Hoffnung herausgab, daß es in der Lehrerwelt einige Beachtung finden und zur Umgestaltung der bisherigen Methodik des elementaren Rechnens das Seinige beitragen möchte: so wäre es doch vermessen gewesen, nur den Gedanken zu hegen, daß es sich auf so lange Zeit hin nicht nur behaupten, sondern in seiner Wirkung auch frisch erhalten werde. Und doch ist dieß der Fall! Nicht nur, daß der „Leitfaden" sich fort und fort der freundlichen Beachtung strebsamer Lehrer im großen deutschen Vaterlande erfreut — er hat sich auch neuerdings im fernen amerikanischen Westen und im fernen europäischen Nordosten Freunde erworben. Nach den Grundsätzen desselben entworfen und geordnet erschienen drei Aufgabensammlungen in russischer Sprache und neuerdings unternahm Hr. Theodor Ewald, Lehrer der Mathematik am 7ten Gymnasium in St. Petersburg, eine Übersetzung des Büchleins in's Russische. Daß selbst jene Methodiker, welche gegen meine Methode polemisierten, nicht wenig davon benutzt haben, will ich gleichfalls hier nicht unerwähnt lassen.

Mein Lehrgang ist allerdings ein sehr scharfer und schroffer Gegensatz gegen das Hergebrachte und zur Geltung Gekommene gewesen und gerade darum hat er entschieden gewirkt. Ich habe auch in vorliegender Auflage nichts daran geändert, wohl aber viel altes Material über Bord geworfen und das Ganze reicher ausgestattet: mit Rücksicht auf die neue Maß- und Gewichtsordnung.

Diese hat auch in die Methodik des elementaren Rechnens neues Leben gebracht. Mag immerhin, wie jeder Umzug viel Unbequemes und

Widerwärtiges hat, der Übergang vom Alten, in das wir uns eingelebt hatten, zum Neuen, das uns an vielen Punkten wie ein Fremdes berührt, mit mancher Unbequemlichkeit und Mühe verbunden sein: die heranwachsende Jugend wird sich dasselbe schon assimilieren und bald der Vorteile des neuen Systems erfreuen. Ja, die Lehrer selber werden in ihrem Rechenunterricht, trotz augenblicklicher Schwierigkeiten, alsbald inne werden, wie viele Lichtseiten das Neue selbst in Bezug auf die Methodik hat und es wird sich auch hier der Satz Spinoza's bewähren: Ordo et connexio idearum idem est ac ordo et connexio rerum.

Wir müssen die Schüler so früh wie möglich mit den neuen Maßen und Gewichten bekannt machen, damit sie so bald wie möglich in der neuen Ordnung der Dinge heimisch werden. Doch brauchen wir keineswegs Alles auf Ein Mal zu geben, sondern thun wohl daran, Eins nach dem Andern zu bringen. Da eine Vergleichung der alten Maße mit den neuen für die nächsten Jahre nicht zu vermeiden ist, so machen wir aus der Not eine Tugend und benutzen das Reduzieren und Resolvieren zu bildenden arithmetischen Übungen — schon im Elementarunterricht; aber wiederum nicht voreilig und verwirrend, sondern da, wo das Verhältnis offen zu Tage liegt und der Schüler mit dem Neuen bereits vertraut geworden ist.

Die Behandlung der Decimalbrüche habe ich von der Stufe des elementaren Rechnens ausgeschlossen, auch hier dem Grundsatze folgend, die Schwierigkeiten nicht ohne Not zu häufen und Einer Anschauung erst eine gewisse Zeit zu lassen, bevor wir zu einer andern übergehen. Vorerst werde der Schüler in den gemeinen Brüchen fest und sicher. Das Rechnen mit diesen gewährt eine so vortreffliche Übung in arithmetischer Turnkraft, im Denken überhaupt, daß wir sie nicht dem Decimalbruchrechnen zu lieb verkürzen, oder auch nur zu schnell in den Hintergrund drängen wollen. Das Rechnen mit Decimalen kann ohnehin schnell genug zur Fertigkeit gebracht werden, da es durch das metrische System an die Hand gegeben wird. Und gerade, weil es dem Mechanismus des Tafelrechnens Vorschub leistet und das Kopfrechnen zurückdrängt und fast überflüssig macht, wollen wir letzteres im Zahlraume von 1 bis 100 und auch von 100 bis 1000 zuvor tüchtig üben und für das Rechnen mit den gemeinen Brüchen einen soliden Grund legen.

Sollten einige von mir herangezogene Übungen im Bruchrechnen für den Standpunkt mancher Schulen als zu schwer befunden werden, so mag man sie weglassen und sich an die leichteren halten. Übrigens habe ich schon auf den ersten Stufen meines Lehrgangs der Fertigkeit, mit Brüchen zu operieren, so tüchtig vorgearbeitet, daß die so vorgebildeten Schüler auch anscheinend große Schwierigkeiten mit spielender Leichtigkeit überwinden werden, wenn es an die Brüche selber geht.

Indem mir die Bearbeitung vorliegender Auflage Gelegenheit bot, einmal wieder Umschau zu halten in der neuesten Rechenbücher-Litteratur, konnte ich nicht umhin der Bemerkung Dr. Bartholomäi's (in seinem Referat im vorletzten Jahrgang des Päd. Jahresberichts) beizupflichten, daß es des Guten fast allzuviel sei und daß Mancher, der diese und jene kleine Variation in bekannten und geebneten Lehrgängen anbringt, alsbald auch

seine „neue Methode" gedruckt sehen will. Dennoch sind bedeutende Fortschritte in der Behandlung des elementaren Rechnens nicht zu verkennen und selbst die Überfülle arithmetischer Schriften zeugt für das rege Interesse der Lehrer am Rechenunterricht und seiner methodischen Durchbildung.

Wir Deutschen sind nun einmal ein pädagogisches Volk, und daß wir vor Allem den Elementarunterricht als die Basis für alle weitere Geistesentwickelung pflegen: das ist ein Vorzug, den wir vor allen europäischen Nationen voraus haben und der einen integrierenden Bestandteil unserer Größe bildet.

Bregenz, Neujahr 1873.

A. W. Grube.

Vorwort

zur sechsten Auflage.

Da die Markwährung Reichswährung geworden, so lag kein Grund vor, die Schüler noch länger mit süddeutschen Gulden und Kreuzern, preußischen und sächsischen Groschen zu behelligen. Nur auf den Thaler und östreichischen Gulden, als Vielfache der Mark, ist in einigen Exempeln noch Rücksicht genommen worden.

Die neue Auflage ist von mir sorgfältig durchgesehen, hier und da gekürzt und wieder ergänzt worden. Am Aufbau des Ganzen habe ich nichts geändert und halte das aufrecht, was ich über diesem Punkt in den früheren Vorworten bemerkt habe. Obwohl ich jetzt das Buch nicht mehr in gleicher Weise verfassen, manche Einseitigkeiten vermeiden und manche Härten mildern würde: so behält die ursprüngliche Form jeder Schrift doch auch ihren Wert und bei der vorliegenden darf ich mich überdies noch dessen getrösten, daß sie auf Freunde wie Gegner anregend gewirkt hat.

Möge diese Wirkung noch einige Jahre fortdauern. Mit diesem Wunsche übergebe ich die sechste Auflage dieses Büchleins dem freundlichen Leser.

Bregenz, Sommer 1880.

A. W. Grube.

Inhalt.

Seite

I. Einleitung.

1. Von der sittlichen Bedeutung der Schule und des Unterrichts überhaupt 1
2. Von der sittlichen Bedeutung des Elementarunterrichtes und des elementaren Rechnens insbesondere 7
3. Von der Methode des elementaren Rechnens 13
4. Einteilung des Stoffes 24

II. Lehrgang.

Erster Kursus: Das Rechnen mit den ganzen Zahlen von 1 bis 100.

a. Im Zahlraume von 1 bis 10 27
b. Im Zahlraume von 10 bis 100 44

Zweiter Kursus: Das Rechnen mit den ganzen Zahlen über 100.

a. Im Zahlraume von 100 bis 1000 — Denkrechnen . . 71
b. In beliebigen Zahlräumen: die Spezies — Regelrechnen 83

Dritter Kursus: Das Rechnen mit Bruchzahlen.

a. Allseitige Anschauung des Bruches — Denkrechnen . . 112
b. Die Spezies der Brüche — Regelrechnen 130

I. Einleitung.

1.

Von der sittlichen Bedeutung der Schule und des Unterrichts überhaupt.

Der Unterricht ergreift den erkennenden Geist, stellt diesem die Idee des Wahren, Guten und Schönen in den einzelnen Unterrichtsobjekten dar, und fordert das lernende Subjekt auf zur freien Gemeinschaft mit dem zu lernenden Gegenstande. Daß es zur Freiheit komme, in welcher der subjektive Geist seines Gegenstandes Herr wird, — daß es nicht bei einem bloßen Anlernen und Zurichten (Dressieren) bleibt: dafür hat die Methode des Unterrichts zu sorgen.

Wenn sich auch aller Unterricht in erster Linie an den erkennenden Geist wenden, von der Anschauung ausgehen, das erklärende Wort zu Hilfe nehmen muß: so folgt daraus keineswegs, daß er nur auf Verstandesbildung ausgehen könne und solle. Durch Wort und Bild, durch Anschauung und Übung bewirkt er in und mit der intellektuellen auch ethische und ästhetische Bildung, weil durch Vorstellungen auch Gefühle, Willensakte und Gesinnungen erzeugt werden.

In jedem Unterrichtsobjekt liegt ein Ideales, so speziell auch die Richtung auf das bürgerliche und praktische Leben darin hervortreten mag. Ohne dies Allgemeinmenschliche, dieses ihm innewohnende Bildungsvermögen hätte es keinen Anspruch gehabt, in den Unterrichtsplan der Schule aufgenommen zu werden. Jeder Unterrichtsgegenstand weckt auf seine Weise den Geist und die Gemütskräfte; von jedem Punkte des Umkreises läßt sich in den Mittelpunkt des menschlichen Wesens vordringen. Darum ruht auf jedem gründlichen und gut geleiteten Unterricht ein pädagogischer Segen, wie denn überhaupt Erziehung ohne Unterricht gar nicht möglich ist. Darum sind wir berechtigt, von der sittlichen (ethischen und ästhetischen) Seite des Unterrichts im Allgemeinen und der einzelnen Unterrichtsobjekte im Besonderen zu sprechen und namentlich einem tüchtigen Elementarunterricht eine ethische Bedeutung für das ganze Entwickelungsleben des Menschen beizumessen, dessen Grundlage er ist.

Ein methodischer Elementarunterricht hat diesen Werth, gleichviel ob er zu Hause oder in der Schule erteilt wird. Der Schulunterricht hat jedoch vor dem Privatunterricht einen bedeutenden Vorteil für die sittliche Bil-

dung des Schülers voraus, nämlich die Gemeinschaft, in welcher sich der Prozeß des Lernens vollzieht.

Nur so kann das Individuum über seine beschränkte Subjektivität hinauskommen, daß es sich objektiv wird in der Menge von Individuen, und zwar wie dieselbe durch einen gemeinsamen sittlichen Zweck zur Einheit verbunden ist. Die durch den Zweck des Unterrichts organisierte Gemeinschaft nennen wir Schule. Der Eintritt des Kindes aus dem elterlichen Hause in eine Schule bildet eine Epoche in seinem Leben, einer zweiten Geburt zu vergleichen, denn es ist eine spezifisch verschiedene Atmosphäre, die nun das Kind empfängt. Die Familie pflanzt die Keime aller sittlichen Bildung durch das Band der Liebe, mit der sie das jugendliche Gemüt an Eltern und Geschwister knüpft; wenn die Gefühle der Ehrfurcht, des Vertrauens, der Liebe nicht schon hier eine freundliche Stätte finden, wo sie wurzeln und sich entfalten können, möchten die anderen sittlichen Kreise des späteren Lebens vergebens einwirken. In der Familie muß das sittliche Individuum erst als Individuum sich ausbilden und kräftigen, um seine Individualität als einen lebensfrischen Bestandteil in die Gemeinschaft vieler Individuen auflösen zu können. Aber eben, weil hier der einzelne Mensch noch als solcher sich geltend macht, weil die Gemeinschaft des kindlichen und elterlichen Lebens noch die unmittelbare ist, in der beide gleichsam zu einem Individuum verschmelzen, die vermittelte oder selbstbewußte Einheit des subjektiven und objektiven sittlichen Geistes erst durch den entschiedenen Gegensatz beider zur Entwickelung gelangt: so muß das Kind in einen zweiten sittlichen Lebenskreis, worin ein objektiver Wille seinem Eigenwillen als unmittelbare Macht über diesen entgegentritt, und das ist die Schule. Diese ist nicht bloß ein wirksames, sondern ein notwendiges Moment in der sittlichen Entwickelung des jungen Menschen. Kein Privatunterricht, auch der beste nicht, ist einen wenn auch nur mittelmäßigen Schulunterricht zu ersetzen im Stande. Die Eltern, welche diesen durch jenen ersetzen und dabei den Kindern eine rechte Wohlthat zu erweisen glauben, lassen eben hierin eine recht nachteilige Lücke in der sittlichen Bildung derselben entstehen. Leider ist die rohe Ansicht vom Unterricht, als komme es dabei auf die Masse des gelernten Stoffes an, eine noch gar verbreitete.

Daß übrigens häusliches und Schulleben nicht in abstraktem Gegensatze aus einander zu halten seien, geht aus dem Gesagten genügend hervor. In dem Schulleben wird das Familienleben allerdings aufgehoben, insofern einerseits die Einseitigkeiten des letzteren zum Besten der sittlichen Entwickelung negiert werden, andererseits wird es aber auch aufbewahrt, insofern es als ein lebendiges Moment in dem Schulleben fortwirken muß, wenn dieses nicht seines natürlichen Grundes, der notwendigen sittlichen Basis, entbehren soll. Beide Lebenskreise sind konzentrisch, weil dieselbe sittliche Idee zum Mittelpunkt habend; dabei steht aber immer der wesentliche Unterschied beider fest, in dem sich das Familienleben zum Schulleben verhält wie das besondere zum allgemeinen, das Privat- zum Staatsleben. In der Schule erhebt sich der junge Mensch von seiner individuellen Beschränktheit und Einzelheit zum Gliede (Organe) eines Gesammt-Körpers, wo er sein partikuläres Selbst, wie Stand, Laune, körperliche und geistige

Eigenheiten ꝛc. daran giebt, um nicht bloß mehr für sich, sondern auch für das andere zu leben. Als Glied an dem Leibe der Schul-Gemeinschaft kann er nur existieren, insofern er sein subjektives Leben zu dem objektiven des sittlichen Gemeinlebens macht, in dem Zwecke der Schule den seines eigenen Selbst findet.

Der objektive Geist der Gemeinschaft erweist seine absolute Macht über den in sie eintretenden Schüler durch dies unmittelbare Gefühl einer imposanten Gewalt, der gegenüber sein Ich als solches verschwindet, und die eigene Freiheit, zu der man ihn erziehen will, tritt ihm zunächst als zwingende Notwendigkeit in dem *Schulgesetze* gegenüber. Dies ist aber nicht das abstrakte in Worte gefaßte Gesetz, lediglich in jenen Verordnungen beschrieben, die als „Schulgesetze" vorgelesen und äußerlich *an* den Schüler herangebracht werden, sondern es ist das in der *Person des Lehrers* konkret gewordene Gesetz, das so lebendig an das Gemüt des Kindes herantretend, den natürlichen Übergang des privaten Familienlebens zu dem staatlichen Schulleben bildet. Die Person des Lehrers ist eben die *Seele* des Schulorganismus, d. h. der individuelle Mittelpunkt, an welchen die Schüler als Teile der Gemeinschaft sich anschließen, und erst dadurch zu Gliedern des ganzen Leibes werden, daß sie diesem sich unterordnen. Der Lehrer hat die Bestimmung, seine Schüler zu Einem ledigen Ganzen (Organismus) zu beseelen, und sie in der Einheit Eines Leibes und Eines Geistes stetig zu erhalten. Darum ist denn die erste und hauptsächlichste Bedingung für die sittliche Wirksamkeit der Schule diese, *daß der Lehrer den Zweck der Schulgemeinschaft selbst lebendig in sich trage*, daß er selbst von dem sittlichen Geiste durchdrungen sei, und so fortwährend den sittlichen Prozeß der Hingabe des Subjektes an das Objekt seinen Schülern *vorlebe*. Es ist erstaunlich, welche Macht eine sittlich-kräftige Persönlichkeit durch ihre bloße Gegenwart auf junge unverdorbene Gemüter ausübt. Wenn schon die momentane Gemütsstimmung des Lehrers unmittelbar auf die Schüler übergeht und hier sich abspiegelt, so ist dies um so mehr der Fall mit seiner stetig fortwirkenden sittlichen Stimmung, dem allen Worten und Handlungen sein Gepräge aufdrückenden Charakter. Ohne Liebe und Ehrfurcht gegen die Person des Lehrers bleibt das Lernen, dieser eigentlich sittliche Akt des Schülers, unlebendig und unwirksam. Das *Lernen* nun oder die Hingabe des unterrichteten Subjekts an das Unterrichts-Objekt ist der *Geist* der Schule, das Lebensprinzip derselben, der Grund, aus welchem und der Zweck, zu welchem diese ihr Dasein hat, für den der ganze Organismus der Schul-Gemeinschaft da ist, und worin das Wesen derselben beruht. Die Gemeinschaft für sich allein, die wir zunächst als zwingende äußere Macht erkannten, und die dem Schüler anfangs als das starre Gesetz der Notwendigkeit entgegentritt, kommt in dem Akte des Lernens erst zu ihrer Wahrheit, indem hier die äußere Notwendigkeit zu einer inneren, das Sollen zum Wollen (Liebe zum Unterrichtsgegenstande), das drückende Gefühl der Abhängigkeit zum freudigen Bewußtsein der Freiheit erhoben wird. Ebenso wäre die Liebe des Schüler zum Lehrer ohne die sittliche Lernthätigkeit eine bloß abstrakte: jene gewinnt erst durch diese ihren Inhalt und ihr wahres Leben. Ist der Unterricht rechter Art, so führt er zur Einheit

des Erkennenden und Erkannten, und das ist wesentlich sittliches Leben; wie dasselbe in seiner Beteiligung in notwendigem Zusammenhange mit der Schulgemeinschaft stehe und das Wesen der Schule nur aus der Sittlichkeit heraus zu erkennen sei, haben wir oben gezeigt.

Gehen wir nun, um die Art und Weise, wie das Unterrichts-Objekt mit dem lernenden Subjekt zu vermitteln sei bestimmter in's Auge zu fassen, näher auf den Entwickelungsprozeß des erkennenden Geistes ein, so treten uns die bekannten drei Momente entgegen, die wir als Anschauen, Vorstellen und Begreifen (reines Denken) bezeichnen, mit ihrer gemeinschaftlichen Basis des Gefühls. In dem Gefühle ist der Geist noch in seiner rohen unvermittelten und darum unbewußten Einheit mit seinem Gegenstande; Fühlendes und Gefühltes, Subjekt und Objekt sind unmittelbar Eins, darum weiß eben noch keins von dem andern: der Gegensatz des Bewußtseins und seines Gegenstandes ist nur erst an sich, noch nicht für das Bewußtsein gesetzt. Damit dies geschehe, bedarf es eines besonderen Aktes von Seiten des Willens, den wir Aufmerksamkeit nennen. Mit der Aufmerksamkeit beginnt die intellektuelle Entwickelung, indem die unmittelbare Einheit des Subjekts und Objekts, wie sie im Gefühle Statt hat, aufgehoben und für die vermittelte freie Einheit des Denkens aufgeschlossen wird. Das aufmerkende Subjekt erhält nun den entäußerten Inhalt seines Gefühls zum Objekt, indem es ihn anschaut. Zwar schaut der Geist auch im Gefühl bereits an, indem er sich seines Zustandes dabei bewußt wird, aber dieser subjektive Zustand und das Bewußtwerden desselben (das Fühlen) ist eben Eins und dasselbe, er empfindet noch bloß, d. h. er findet das Andere von ihm (das Objekt) in sich, und bildet die Außenwelt in sich hinein. Im Anschauen aber ist der umgekehrte Prozeß: der Geist bildet sich (den Inhalt seiner Empfindung) in die Außenwelt hinaus, indem er seine eigene innere Thätigkeit als ein von ihm Verschiedenes, ihm Gegenüberstehendes sich vorhält und es anschaut *). So erblicken wir hier den Zusammenhang der beiden Grundfaktoren des menschlichen Geistes-Lebens: des Einwirkens von Außen und des Rückwirkens nach Außen, des Reizes und des Triebes oder der Rezeptivität und Spontaneität. Der Reiz des Objektes auf das Subjekt ist die Empfindung, die spontane Rückwirkung des Subjektes zum Objekte hin die Aufmerksamkeit und das Produkt beider Faktoren die Anschauung. — Obwohl nun aber in der Anschauung der Geist aus seiner unmittelbaren Einheit mit dem Gegenstande heraus ist, so ist doch noch in der That die gleiche Unmittelbarkeit vorhanden, nur auf der anderen Seite, nämlich dem Objekte zugewandt. Wie im Gefühl der Gegenstand ganz in

*) „Anschauen" ist ein herrliches Wort. Es drückt im Schauen die subjektive Thätigkeit aus, allein nicht bloß als ein Sehen, wie das Auge des Tieres in der sinnlichen Aeußerlichkeit befangen ist, sondern als eine Vertiefung in die Sache. Die Präposition „an" aber bezeichnet, daß das Schauen die Sache erst zur wirklichen Objektivität mache. Da nun die Funktion des Gesichtssinns den Gegensatz des Sub- und Objektiven am klarsten enthält, so ist klar, wie die Terminologie dieser Sphäre des Geistes von Ausdrücken wimmelt, die dem Sehen entnommen sind, wie Klarheit, Bild ꝛc. Rosenkranz, Lehre vom subjektiven Geist.

der Empfindung aufgeht, so geht umgekehrt in der Anschauung der Geist ganz in seinem Gegenstande auf, versenkt sich in das ihm Gegenüberstehende so, daß er *sich* noch nicht als dasselbe hat und weiß. Darum verhält er sich denn auch noch abhängig und unfrei zu dem Dinge, denn frei ist er nur dann, wenn er in seinem Objekte sich selber hat, in dem Andern bei sich ist. In der Anschauung hat der Geist bloß das Objekt, nicht sich als Subjekt. Indem er nun im Anschauen die Thätigkeit der Anschauung auf sich zieht, zu sich gleichsam zurückwendet oder *reflektiert*, damit aber seine Anschauung (als Objekt) als der eigenen Thätigkeit sich bewußt wird, *so stellt er sich den Gegenstand vor*, nicht mehr als etwa außer ihm Seiendes, als räumliche und zeitliche Existenz, sondern in ihm selbst, als in das Zeitleben der Seele übergegangen, darum auch mit einem geistigeren (obwohl noch halb halbsinnlichen) Körper bekleidet, das ist das *Wort*.

Da es uns hier nicht darum zu thun ist, den psychologischen Hergang dieser Entwickelung in's Einzelne zu verfolgen, sondern nur auf die sittliche Seite dieses Prozesses, nämlich auf die Willensakte dabei, hinzuweisen, so machen wir überall nur auf das Wesentlichste, das eigentliche punctum saliens aufmerksam. Wie wir dieses für die Anschauung in der Aufmerksamkeit erkannten, so hat es sich nun als Reflexion für die Vorstellung gezeigt.

In der Reflexion trennt sich das Bewußtsein von seinem Gegenstande, da es vorher ganz von diesem eingenommen, darein versenkt war. Es gehört eine Spannung der Kraft, ein kräftiger Anstoß des Willens dazu, um den Geist aus dieser unmittelbaren Einheit mit seinem Gegenstande zu befreien, und die Richtung auf sich zu geben. Die Reflexion ist eine Selbstbefreiung des Geistes, ein Losreißen von dem äußeren Eindrucke — wie die Aufmerksamkeit in ähnlicher Weise ein Losreißen von der Unmittelbarkeit des eigenen Zustandes oder des inneren Eindruckes ist. Indem der Geist auf die Anschauung als auf sein Produkt reflektiert, sich in dem Moment des Anschauens als den Anschauenden erfaßt, weiß er sich auch als *Macht* über das Objekt, das er nun nach Gefallen vorstellen und fallen lassen kann, und an dessen räumliche Gegenwart er nicht mehr gebunden ist.

Obwohl er nun vermittelst der Reflexion den Gegenstand als *sein Produkt* sich vorstellt, so bleibt dieser doch immer der „Gegenstand", das Andere von ihm, darum ihm noch Fremdes, das eben, als mit der ganzen Sinnlichkeit des Anschauens behaftet, das noch Ungeistige ist. Der Geist kann aber nur das wahrhaft erkennen, von dem nur *wissen*, das von ihm gleicher, also geistiger Natur — daß Er selbst ist. Wenn das Wissen *von* der Thätigkeit unseres Geistes nicht ursprünglich diese Thätigkeit selbst wäre, so wäre auch kein „Selbstbewußtsein", diese von der Sprache hier selbst treffend bezeichnete Einheit von Denken und Sein, möglich. In der Vorstellung ist nun zwar die Unmittelbarkeit des Anschauens aufgehoben, aber die Unmittelbarkeit des Wissens, worin der Geist als der selbstbewußte mit seinem Gegenstand Eins ist, noch nicht gewonnen. Dazu gehört denn, daß der Geist sich im Momente des Vorstellens erfasse, sich als den Vorstellenden von dem vorgestellten Objekte

(der Vorstellung) unterscheide oder von der Vorstellung abstrahiere, um sie nun als sein eigenes Produkt, als sein Ich selbst zu haben. So wird ihm das Ding sein Gedanke, das Ding und das Denken fällt in Einem Selbstbewußtsein zusammen, und das ist die höchste, weil vermittelte Einheit des Subjekts und Objekts im Gebiete des reinen Denkens. Weil aber mit der Handlung des Vorstellens das Produkt derselben, nämlich das vorgestellte Bild, immer zugleich mit entsteht, so bedarf es, um beides zu trennen, und die reine Thätigkeit in abstracto festzuhalten, der Energie des Willens; das Gelingen dieser Abstraktion hängt lediglich von der dem Geiste inwohnenden Freiheit ab, aus dem unreflektierten Zustande des Anschauens und dem reflektierten Erkennen des Vorstellens sich zu „befreien", und so haben wir die Freiheit als den tiefsten Grund des Selbstbewußtseins aufgezeigt. Diese Selbstbefreiung des Geistes schreitet, wie gesagt, stufenweis von der Aufmerksamkeit durch die Reflexion zur Abstraktion fort, um zum Ziele des freien Erkennens, nämlich in dem Andern bei sich zu sein, sich als das Subjekt zugleich als das Objekt im Denken zu haben, zu gelangen.

Man fasse aber diese Entwickelungsstufen des Anschauens, Vorstellens und Denkens nicht als abgegrenzte, geschiedene und in der Zeit aufeinanderfolgende Thätigkeiten, sondern eben als Entwickelungs-Momente des erkennenden Geistes. Ohne das vorstellende (verständige) Denken, d. h. ohne Unterscheidung des Ichs von seinem Gegenstande, wäre gar kein (bewußtes) Anschauen möglich, denn ich weiß nur soviel von der Anschauung, als ich in Begriffe fassen kann. Hinwiederum ist das Denken gar nicht ohne Anschauen möglich, denn es ist bloß die Thätigkeit des Anschauens als solche (in abstracto) festgehalten. Ebenso ist mit dem Gesagten der Absicht gewehrt, als verhalte sich der Geist im Anschauen wesentlich rezeptiv und im Vorstellen wesentlich produktiv. Es hat sich ergeben:

Faktoren

Bestimmtsein (Rezeptivität).	Selbstbestimmen (Spontaneität).	Produkt-Entwickelungsmoment.
Gefühl	Aufmerken	Anschauen
Anschauung	Reflektieren	Vorstellen
Vorstellung	Abstrahieren	Denken;

d. h. es ist in allen Geistesfunktionen dasselbe Wechselverhältnis des Einwirkens von Außen und des Rückwirkens nach Außen, oder der Geist ist auf jedem Punkte seiner Entwickelung der sittlich-freie, sich in aller seiner Thätigkeit selbst festhaltend und in jedem Gegenstande derselben bei sich seiend. Die sittliche Unfreiheit besteht ja in nichts Anderem, als in dem Nichtansichhalten, in dem unreflektierten Handeln, in dem Nichtabstrahierenkönnen von dem äußeren (sinnlichen) Eindrucke, in dem Hingegebensein an die Macht der Sinnenwelt.

2.

Von der sittlichen Bedeutung des Elementarunterrichts und des elementaren Rechnens insbesondere.

Nach den sub 1. skizzierten Momenten in der Entwickelung des erkennenden Geistes muß auch die Schule als Gesamnt-Anstalt für die Entwickelung der Intelligenz sich gliedern. Insofern sie das Gefühl zur Anschauung erhebt, ist sie Elementar- oder Grundschule, die Anschauung zur Vorstellung (dem verständigen Erkennen) entwickelnd, ist sie Volks- oder niedere Bürgerschule, die Vorstellung zum Denken (wissenschaftlichen Erkennen) fortführend, und zwar nach der idealen (durch die antiken Sprachen) oder nach der realen Seite hin (moderne Sprachen und Naturwissenschaft als Hauptbildungsmittel), Gelehrten- (lateinisches) oder Real- (deutsches) Gymnasium, und endlich im reinen Denken, in der Wissenschaft als solcher, sich bewegend, die Universität.

Wie die Anschauung die Grundlage für die gesammte Erkenntnisentwickelung bildet, so ist die Elementarschule die Grundlage für alle übrige Unterrichtsanstalten; wie hier zugleich die ideale und reale Seite der Dinge noch in ungeschiedener Einheit beisammen ist, so fällt auch in der Elementarschule der Unterschied des theoretischen und praktischen, oder des Gelehrten- und Bürgerstandes zusammen. Somit ist sie die gemeinsame Bildungsanstalt für alle Stände und die gemeinsame Vorbereitungsschule für alle Schulen. Weil aber die Periode der Anschauung vorzugsweise in den Zeitraum vom 6ten bis 10ten Jahre des Kindes-Alters fällt, so ist damit auch die Elementarschulzeit bestimmt, und mit dem Ablauf derselbem liefert die Elementarschule ihre Zöglinge entweder an die Volksschule, oder an eins der beiden Gymnasien ab.

Der Elementarunterricht erfaßt also seine Schüler auf dem Standpunkte der Anschauung. Wenn wir oben das (reine) Denken als das Ziel und Ende der Erkenntnisentwickelung bezeichneten, so ist nun darauf hinzuweisen, daß es ebensowohl der Anfang derselben, d. h. daß es wesentlich schon in der Anschauung mitgesetzt sei, denn wäre es nicht schon im Anfange der intellektuellen Entwickelung da, so wäre es auch nicht ihr Ende.

Jede empirische Anschauung, sobald sie der Geist frei aus sich wiederholt und vorstellt, wird zu einem Gemein- (allgemeinen) Bilde oder Schema, welches er nun an alle ähnliche Anschauungen hält, um sie damit zu messen. Je mehr nun der Geist bei seinem Anschauen und Vorstellen auf sich, als den Anschauenden und Vorstellenden, reflektiert, und von allem Beiwerk der sinnlichen Wahrnehmung als dem Unwesentlichen abstrahiert, kommt er zum Begriff des Dinges. Für das Anschauen aber heißt das so viel, als: er bezieht das Mannigfaltige der Anschauung auf die Einheit seiner Thätigkeit des Anschauens, er „begreift" es unter jenem Gemeinbilde oder Schema, daß ihn somit zur Regel für sein Anschauen, d. i. zu der in allen ähnlichen Fällen wieder so einzurichtenden Thätigkeit wird. Weil aber in der Anschauung der Begriff und der Gegenstand unmittelbar zusammenfällt, ein Bewußtsein des letzteren aber nur möglich ist, indem der Geist beides auseinanderhält, so muß er für ein bewußtes

Anschauen den Begriff von der Anschauung (als Objekt) trennen, und diese Trennung in der Vereinigung geschieht im Urteil. Beides, der Baum und das Blühen, fällt in der Anschauung des „blühenden Baumes" zusammen; indem ich aber diese Anschauung als mein Produkt anerkenne, zwischen meiner Thätigkeit und dem angeschauten Objekte gleichsam teile, so urteile ich: „der Baum blüht." Es muß also überall dieser Seitenblick auf meine Thätigkeit die Anschauung begleiten, der anschauende Geist muß sich stets von seinem Produkte unterscheiden, um zum Bewußtsein seiner Anschauung zu gelangen. Ohne Urteil also bliebe die Anschauung eine unverstandene, und ginge für den Geist spurlos vorüber, weil er sie nicht als seine Thätigkeit (im Begriffe) festzuhalten vermöchte. Das Urteilen besteht aber in dem Reflektieren des Geistes auf sein Anschauen, und somit ist die Reflexion der integrierende Bestandteil des Anschauens. Mit dem Hinwenden des Geistes auf sich selber ist es aber noch nicht gethan, um eine intensiv-fortwirkende Anschauung zu gewinnen, muß derselbe auch sich in der reinen Thätigkeit seines Anschauens zu fassen und festzuhalten wissen, um allen störend eindringenden Stoff fern zu halten, von Allem, was nicht der Inhalt seiner Thätigkeit ist, zu abstrahieren. In dem innigen, lebendigen Anschauen muß ebensowohl die Reflexion wie die Abstraktion sich bereits wirksam erweisen, und wo dieses nicht geschieht, da wird später das eigentlich reflektierende und abstrakte Denken nie das rechte sein können; ist es aber der Fall, dann ist auch das Anschauen nicht ein bloßes Anschauen mehr, sondern ein Beobachten, d. h. ein Anschauen nach einem Schema, ein Anschauen mit dem Begriffe, oder mit der Einheit in der Mannigfaltigkeit.

Da nun diese Einheit, wie wir sahen, nichts ist als die Einheit der eigenen Thätigkeit des Geistes als solche, worin der Geist sich selbst erfaßt: so ist eben freies Anschauen und Beobachten eins. Der anschauende Geist denkt, indem er beobachtet, und nur Beobachtetes ist er zu begreifen im Stande. — Dieses Hinwenden des Anschauens auf das Eine, und das Wegsehen von allem Andern, also das Beobachten, muß der Schüler erst lernen, und das ist der formelle Zweck des Elementarunterrichts. Das Aufmerken, wie das Reflektieren und Abstrahieren, soll nicht bloß eine momentane Thätigkeit der Intelligenz sein, sondern muß von ihrer ersten Entwickelung an eine kontinuierliche Richtung derselben, der Schüler muß dazu gewöhnt werden — sein Erkennen muß mit dem Willen verschmelzen. Wo das Lernen nicht ein Ergebnis des Lernen-Wollens ist, da ist es keine wirkliche Thätigkeit, denn eine solche ist nur als Resultat eines Willensaktes denkbar. Der wahre Elementarunterricht ist darum eine Anleitung zum Anschauen-Wollen, nur so ist der Geist in der Anschauung der freie, sich selbst bestimmende, und der ganze, d. i. sittliche Mensch im Anschauen thätig. Das Aufmerken und Abstrahieren sind die Elementar-Tugenden des Schülers; wo diese fehlen, sieht er wohl das eine Objekt, aber er sieht von dem andern nicht ab, beobachtet darum keins, und — denkt nichts beim Anschauen. Dann aber kann dies nicht hineindringen in den Mittelpunkt des geistigen Lebens und zu einem Momente desselben werden, das aber als empfundenes Eigentum

auch für alle fernere Entwickelung lebendig fortwirkt; — die Anschauung verbleicht zu unklarer Erinnerung, und das Wort dafür wird leerer Schall; es kann wohl mit dem Gedächtnisse festgehalten werden, aber es ist nicht zur Lebenssubstanz des Geistes geworden, also „tot an ihm selber." Dieses Anschauen mit der ganzen Teilnahme des sittlichen Menschen nennt ein geachteter Pädagog*) sehr bezeichnend ein Lernen mit dem Gemüte, als der substantiellen Mitte und Basis des geistigen Lebens.

Die Entwickelung des Anschauens nach der beschriebenen formellen Seite hin könnte man füglich die Logik des Anschauens nennen.

Sehen wir uns nun nach dem Stoffe um, den die Elementarschule ihren Zöglingen bietet, um zu erfahren, welches Objekt hier die Logik des Anschauens vorzugsweise zu vertreten habe. Die der Anschauung des Kindes geöffneten Kreise sind das der Familie adhärierende Menschenleben und das im Horizonte des Kindes erscheinende Naturleben. Beide Sphären bieten die Elemente dar für die drei der Erkenntnis geöffneten Reiche: das des göttlichen (absoluten), das des freien Menschen-Geistes, und das der Naturnotwendigkeit. — Der göttliche Geist kann vorerst nur geschichtlich erkannt werden, und zwar nur in solchen Geschichten, wie sie dem naivkindlichen Gottesbewußtsein entsprechen, also an das Familienleben sich knüpfen. Hier bilden denn die biblischen Geschichten, namentlich des alten Testaments, den bewährten Stoff, worin das in dem jugendlichen Gemüte angeregte Gefühl des Höchsten seinen entsprechenden Ausdruck für die Anschauung findet.

Die Natur bietet in den Grundanschauungen (eben denjenigen, welche an die nächste Heimat sich knüpfen) der physischen und politischen Geographie, die aber als Elemente der später daraus hervorgehenden Naturbeschreibung, Geographie und Geschichte planmäßig zur „Weltkunde" zusammenzufassen sind, — das entsprechende Material, um in den Schulen ein Weltbewußtsein heranzubilden.

Für die Erkenntnis des menschlichen Geistes, also für die Entwickelung des Selbstbewußtseins als solches dient nun die **Sprache**, in deren Entwickelung die des eigenen Bewußtseins unmittelbar gesetzt ist, wie denn auch jedes Lehrobjekt mit dem Bewußtsein der gegenständlichen Welt auch das der inneren, geistigen Welt immer mit entwickelt, darum auch jeder Unterrichtsgegenstand das Material für den Sprachunterricht bietet. Von einem besondern Sprachunterrichte kann aber in der Elementarschule noch nicht die Rede sein, weil da überhaupt erst das Material gewonnen werden soll, welches die genannten beiden Unterrichtsobjekte darbieten. Für den anschauenden Geist ist der Sprachunterricht nichts als Sprachübung, und das logische Element des Sprachunterrichtes, die Grammatik, muß darum wegfallen. —

Sehen wir nun den biblischen Geschichtsunterricht und den weltkund-

---

*) Dr. Ch. Weiß, in dem 2ten Teile seiner „Erfahrungen und Ratschläge aus dem Leben eines Schulfreundes." (Auch unter dem Titel: „Zur Fundamental- und Methodenlehre für ein einfacheres Lehrsystem in den Volksschulen unserer Zeit", Halle, Schwetschke u. S. 1839.)

lichen näher an, so leuchtet ein, wie sie das Material für die formelle Ausbildung der Anschauung durchaus nicht zu bieten im Stande sind.

Von den biblischen Geschichten kann namentlich nicht eine strenge und stetige Bildung der Aufmerksamkeit erwartet werden. Hier, wie im ganzen Religionsunterrichte, wo das Wort des Lehrers die feinsten und zartesten Saiten des Gemüts berührt, wo das angeregte Gefühl ganz seinem Drange überlassen bleiben und frei sich entfalten soll: hier muß auch jedes unsanfte Eingreifen des regelnden Verstandes, jede harte Berührung und zwingende Einwirkung von außen her von der Lernthätigkeit des Schülers ferngehalten werden. Ebenso kann hier von einer Reflexion auf die eigene Thätigkeit gar keine Rede sein, weil das Gefühl als solches reflexionslos ist. In ähnlicher Weise muß auch in der Weltkunde die Reflexion des Kindes auf sich wegfallen, wenn eine rechte Unmittelbarkeit der Anschauung erzeugt werden soll. Hier soll der Schüler gerade aus sich herausgehen und mit lebendiger Teilnahme sich in das Objekt versenken, nicht auf seinen eigenen Geist, sondern auf dessen Gegenstand soll er merken. Obwohl nun auf diesem Gebiete die Aufmerksamkeit in steter Anregung erhalten wird durch das Neue und Mannigfaltige des Stoffes, so giebt doch allerdings gerade diese Mannigfaltigkeit der in dem ersten Jugendalter so mächtigen Zerstreuung vielfache Nahrung, so daß es der äußeren Zucht bedarf, um den zerstreuten Sinn zu sammeln, da die Einheit des Gegenstandes nicht zwingen kann, weil sie überhaupt nicht da ist. Die Weltkunde wie der Religionsunterricht in der Elementarschule vermag der Anschauung nur einzelne, abgetreunte Stücke zu bieten, und läßt also auch für das begreifende Anschauen (Beobachten) eine fühlbare Lücke. So fehlt also für die postulierte Logik des Anschauens ein drittes Lehrobjekt, das da einerseits den Geist zur Reflexion auf sich anleitete, in der Aufmerksamkeit auf seine Thätigkeit ihn stetig erhielte, so daß jede Unaufmerksamkeit dem Schüler selbst augenblicklich sich fühlbar machte, andererseits einen flüssigen, kontinuierlich sich entwickelnden Stoff darböte, der überall von der Mannigfaltigkeit des Gegebenen zur inneren Einheit des Begriffes hinführte, wo jeder Fehler im Zusammenfassen sogleich auffiele, jedes Austreten aus der zusammenhängenden Kette sogleich sich rächte, dabei die innere Anschauung systematisch geübt würde — welcher andere Lehrgegenstand könnte das sein, als die Mathematik? und zwar für den Elementarschüler auch der elementarste Teil dieser Wissenschaft, die niedere Arithmetik? Diese genießt den doppelten Vorzug, daß sie einmal die Zahl-Größe, also ein Abstraktes, Unsinnliches, zu ihrem Inhalte hat, dann aber auch zugleich diesen Inhalt in seiner Verbindung mit dem einzelnen Falle, an Gegenständen des täglichen Lebens aufweist, die abstrakte Zahl-Größe als konkrete Zahl mit der Anschauung des Schülers vermittelt, und den arithmetischen Stoff als „praktisches Rechnen" entwickelt. So hätten wir denn das Rechnen als das dritte wesentliche Lehrobjekt der Elementarschule und zwar in seiner Notwendigkeit als Logik des Anschauens erkannt*).

*) Der ehrenwerte Dinter spricht sich in einem (in den Jahnschen Jahrb. S. 328 mitgeteilten) Briefe an einen Freund in Vevay über das angedeutete

Wie Raum und Zeit als das Allgemeine allen einzelnen Anschauungen zum Grunde liegen, so muß auch die Erkenntnis des Allgemeinen (die logische oder philosophische Seite des Unterrichts) sich notwendig auf Anschauung der allgemeinen Raum- und Zeitgröße — Maß und Zahl — gründen, denn indem Raum und Zeit die wesentliche Form, d. i. das allgemeine Gesetz in seiner Anschauung selber sind, so lassen sie auch die klarsten und bestimmtesten Begriffe zu, als welche unmittelbar aus der Anschauung der Sinnenwelt hervorgehen. Darum ist hier allein das Abstrakte zu suchen, welches dem Stadium der Anschauung entspricht. So sehen wir auch historisch den Anfang des menschlichen Denkens in der Mathematik, und die mathematische Erkenntnis als Vorschule der philosophischen: wie die Entwickelung der Menschheit im Ganzen, so die Entwickelung des Individuums im Einzelnen. Darum würde der, welcher die Stufe der Arithmetik überspringen wollte — wenn wir auch von ihrer Notwendigkeit für das bürgerliche Leben ganz absehen — alsbald die gewaltige Lücke empfinden, wenn er an die Wissenschaften der Sprache, Geschichte, Moral ꝛc. heran träte: es würde ihm mit dem Maßstabe des äußeren Lebens auch der des inneren, mit der richtigen Auffassung der Zeitgrößen in der Körperwelt auch die des Zeitlebens des Menschengeistes abgehen*).

Obwohl der elementarste, so ist das praktische Rechnen doch ein *Teil der Mathematik*, und hat als solcher auch Anteil an dem Leben und Weben des Ganzen. Werfen wir nun noch einen kurzen Blick auf dieses, so erscheint hier die *Methode* als dasjenige, was die Mathematik zu einem so ausgezeichneten und für jeden höheren wissenschaftlichen Unterricht unentbehrlichen Unterrichtsgegenstand macht. Die Methode keiner anderen Wissenschaft kann sich mit der mathematischen messen; diese ist die systematische schlechthin, welche ihren Stoff mit absoluter Notwendigkeit entwickelt und in der vollkommensten Einheit ihrer Teile festhält, daher sie auch jedem einzelnen Satze in der großen Kette den Stempel der unmittelbarsten Gewißheit (Evidenz) aufdrückt. Dies kann die Methode aber nur vermöge ihres Inhalts leisten, welcher ein rein abstrakter oder vielmehr die abstrakte Thätigkeit des vorstellenden Geistes selber ist. Es ist

---

Verhältnis der Hauptgegenstände des Elementar-Unterrichts also aus: „Der Handwerker muß im Gebiete dessen, *was sein kann*, durch die Religion, im Gebiete dessen, *was sein muß*, durch die Arithmetik, im Gebiete dessen, *was gewesen ist*, durch die biblische Geschichte denken lernen."

*) „Gestalt und Zahl liegen so recht in der Mitte unsers ursprünglichen Gesichtskreises. Die Grundanfänge des Messens und Rechnens sind die ersten, fast nicht auszulassenden Vorübungen, welche auch der schwächste Verstand sich selber schafft. Hier ist nichts, was sich der Sprache entzöge ꝛc. — hier an der einen und gleichen Stelle, wo auch das Bildungsmittel für die Anschauung liegen muß, hat man zu suchen, was sonst nirgends zu finden ist: *den Faden für einen frühen Kinderunterricht, der so beschaffen sei, daß er sowohl sich als aller anderen Unterweisung eine Autorität schaffe, auf deren Geheiß die Zerstreuung entweiche, die Aufmerksamkeit komme und beharre.*" *Herbart*, ABC der Anschauung, 2te Aufl. S. 26 ff. Beiläufig gesagt, ein Buch, aus welchem die Elementarlehrer Vieles lernen könnten, sowohl für den Rechen- und Formlehrunterricht, als auch für einen naturgemäß zu begründenden geographischen Unterricht.

hier der Geist sich selbst der Stoff, weshalb er über denselben auch mit unbeschränkter Freiheit gebietet. In der Mathematik fällt das Denken und Ding unmittelbar zusammen, und darin liegt eben ihr großer, zu allen Zeiten anerkannter Wert und Vorzug, daß sie in strengster Kontinuität ihres Stoffes den Geist zur Einheit in seiner Thätigkeit führt, was wir oben als „das in dem Gegenstande bei sich Sein, das Sichselbstfesthalten des Geistes und Abstrahieren von allem ihm Fremden" bezeichnet haben.

Wie nun die eigentliche Mathematik die Vermittlerin ist zwischen dem vorstellenden und reinen Denken, so ist das Rechnen der Elementar- und Volksschule die Vermittelung des anschauenden mit dem vorstellenden Denken. Indem das elementare Rechnen das mit der eigentlichen Arithmetik gemein hat, daß ihm die abstrakte Zahl zum Grunde liegt, seinen praktischen Stoff aber auf dieses Allgemeine zurückführen muß: so zwingt es den Schüler zur Abstraktion von der empirischen Anschauung und zur Reflexion auf sich, — und weil jener arithmetische Stoff als rein abstrakter einer systematischen Entwickelung nicht bloß fähig ist, sondern auch bedarf, erfordert er eine stetige Aufmersamkeit für seine Entwickelung*) — aus welchen Thätigkeiten dann als notwendiges Resultat sich die Beobachtung oder das Zusammenfassen der konkreten Mannigfaltigkeit des Anschauungsmaterials zur abstrakten Einheit des Denkens (der reinen Thätigkeit im Anschauen) ergiebt. — Hierin liegt nun freilich zugleich die große Schwierigkeit für die Methode des elementaren Rechnens. So sehr auch dessen arithmetischer Inhalt für eine systematisch fortschreitend Entwickelung sich eignet, so sehr widerstrebt eine solche der Partikularität der nur auf Einzelnes, Nebeneinanderliegendes gerichteten Anschauung, wie sie das „praktische" Rechnen erheischt, das noch dazu die Bestimmung hat, ein regelrechtes Zifferrechnen als Mittel für den späteren Rechenunterricht zur Fertigkeit zu bringen. Weil so einerseits der Stoff des elementaren Rechnens ein äußerst flüssiger, andrerseits wieder ein eben so starrer ist, so zeigt uns die Methodik in diesem Objekte ein so endloses Experimentieren, eine solche Überfülle von methodischen Anweisungen, Leitfäden und Lehrgängen, wie es in keinem anderen Unterrichtsgegenstande der Fall ist. Allerdings ist auch gerade die Methode beim Rechnen die Hauptsache, und der sittliche Einfluß desselben hängt vorzugsweise von seiner Methode ab, weil es eben die formelle Seite des Anschauens zu vertreten hat — ganz so, wie der pädagogische Wert der Mathematik in ihrer Methode beruht**).

---

*) Man kann es in jeder Rechenstunde beobachten, falls sie sonst gut erteilt wird, wie in keinem andern Gegenstande die Aufmerksamkeit und das Abstrahieren von dem Aeußeren so hervortritt, wie hier namentlich im Kopfrechnen. Es ist als arbeitete der ganze Körper mit, der lebhaftere Schüler wehrt mit Händen und Füßen jeden störenden Eindruck von sich ab, und sein ganzes Wesen ist in Unruhe, sobald die Kette seiner Thätigkeit unterbrochen ist.

**) A. Salberg (Methode und Lehrgang des Rechenunterrichts in den Unter- und Mittel-Klassen der Volksschulen, Prakt. Schulm., von Alb. Richter, 1880, 2), der sich mit vieler Liebe und Sorgfalt in meinen Lehrgang hineingearbeitet hat, scheint den an sich klaren und feststehenden Satz: „das elementare Rechnen hat das mit der Arithmetik gemein, daß ihm die abstrakte Zahl zu Grunde liegt", dahin misverstanden zu haben, daß darin ein Angeborensein der Zahlenbegriffe

3.

Von der Methode des elementaren Rechnens.

Wie bereits darauf hingewiesen, tritt uns in unserm Lehrobjekte einerseits das Subjekt als der anschauende Geist, andererseits das Objekt als die konkret-abstrakte Zahlgröße entgegen. Die Methode hat diesen Gegensatz zur organischen Einheit zu verbinden; wie ihr dies gelang, lehrt die Geschichte der Methodik des Rechenunterrichts. Wir können a priori annehmen, daß, so lange jene Einheit nicht gefunden wurde, auch einer der zwei Faktoren, entweder das Subjekt oder das Objekt, überwiegend, und darum einseitig von der Methodik festgehalten sei. Das mag zunächst eine kurze Übersicht darthun.

Als Begründer unserer ganzen Elementar-Methodik, besonders aber einer bildenden Methode des elementarischen Rechnens, ist bekanntlich Pestalozzi zu betrachten. Es ergiebt sich also für unsern Gegenstand ein Zeitraum vor Pestalozzi, seine Zeit und die neuesten Reformen seiner Schule.

Den ersten Zeitraum könnte man füglich den der einseitigen Objektivität nennen. Es ist bekanntlich der, wo man dem Schüler das Rechnen als eine abstrakte, in sich abgeschlossene Wissenschaft vorführte, auf das Subjekt gar keine, auf das Objekt allein Rücksicht nahm. Man hatte es hier eigentlich nur mit der Ziffer, als dem entsprechenden Zeichen für die abstrakte Zahl, und mit der abstrakt-wissenschaftlichen Operation zu thun; der Stoff war abgeteilt nicht nach dem Entwickelungsgesetze des kindlichen Geistes, vom Einzelnen zum Allgemeinen aufsteigend, sondern wie er dem reflektierenden Verstande des entwickelten wissenschaftlichen Geistes als fertig vorlag. Die reine und angewandte (benannte) Zahl standen in ausschließendem Gegensatze einander sehr oft gegenüber. Diese Periode, wo man das Rechnen damit begann: Es giebt fünf Spezies,

---

behauptet sei oder gar einem Rechnen mit reinen (nicht benannten) Zahlen das Wort geredet werde! Daß dies nicht der Fall, ist so einleuchtend, daß ich wohl nicht nötig habe, noch näher darauf einzugehen. Bei jedem Rechnen, auch dem allereinfachsten des praktischen Lebens, muß aber von der „Benennung" abstrahiert und auf das reine Zahlenverhältnis zurückgegangen werden. Gerade in dieser Abstraktion besteht die Arbeit und die geistbildende Kraft des Rechnens. Es wäre überhaupt kein Rechnen, wenn ihm nicht „die abstrakte Zahl" zu Grunde läge, deren Eigenschaften und Gesetze sich überall gleich bleiben.

Der Elementarunterricht hat es aber nie mit der abstrakten, allgemeinen Zahl als solcher, sondern mit der konkreten in anschaulichen Verhältnissen sich darstellenden Zahl zu thun. Wenn er diese Verhältnisse zuerst an Strichen, Punkten, Rechenpfennigen ꝛc. anschaulich macht und dann sie an den Dingen des Geschäftslebens abermals anschauen läßt, indem er das an der reinen Zahl Erkannte auf die Praxis des bürgerlichen Lebens anwendet: so ist das der einfachste und natürlichste Weg. Striche, an die Wandtafel und auf die Schiefertafel geschrieben, sind die allereinfachsten Hilfsmittel zur Veranschaulichung von Zahlenbegriffen; — Striche, Finger, Kugeln, Stäbchen sind auch „Sachen" und Herr Salberg verfällt in einen methodischen Irrthum, wenn er seinem sogen. „Sachrechnen" zu lieb ausruft: „Fort mit den Strichen, Kugeln, Bohnen aus den Elementarklassen, insoweit sie nur als Hilfsmittel dienen sollen!"

nämlich Numerieren, Addieren ꝛc., dann das Numerieren definierte und bis in die Billionen exerzierte, so überall mit Definitionen und Regeln begann und von Summanden und Summen sprach, ehe noch irgend einmal summiert war ꝛc. — diese Periode ist im Ganzen wohl eine gewesene, wenn auch hier und da gegenwärtig immer noch herrschend.

Den zweiten Zeitraum möchten wir den *der einseitigen Subjektivität* nennen. Es ist der Zeitraum der gänzlichen Umgestaltung, des eigentlichen Aufslebens des Elementarunterrichts — denn in der ersten Periode kann von einem solchen kaum die Rede sein —, in dem man für die Methode den entgegengesetzten Weg einschlug: zunächst und vor Allem das *Subjekt* in's Auge zu fassen, und nur dem *psychologischen Gesetze* gemäß das Unterrichtsobjekt dem Schüler vorzuführen. Damit machte man den bedeutenden Fortschritt vom Zeichen zur Sache. Wenn früher die Ziffer Zweck und Ziel des ganzen Rechnens bildete, so jetzt die *Zahl*, die in ihrer ganzen Bedeutung für die *formelle Bildung des Subjekts* erfaßt und ausgebeutet wurde. Die Pestalozzische Schule hat namentlich für das Rechnen das hohe Verdienst, dasselbe dem Tode eines abstrakten Formalismus entrissen und auf die kronkrete Grundlage lebendiger Anschauung gepflanzt zu haben.

Wie aber der Übergang von einem Extrem fast notwendig in das andere führt, so wurde nun auch hier über dem Subjekt das Objekt vernachlässigt. Man hatte zwar den kindlichen Geist in seiner eigentümlichen Natur ergriffen, aber den *Rechenstoff* in seinen abstrakten und für den sich entwickelnden Geist toten Gegensätzen gelassen: darum mußte die Entwickelung des subjektiven Geistes eine *abstrakte*, weil nicht mit dem Unterrichtsobjekte zu lebendiger Einheit verwachsene (konkrete) Bildung erzeugen. Indem man jetzt nur dem Prinzip des psychologischen Gesetzes huldigte, verblieb der Stoff in seiner, aus dem reflektierenden Verstande entsprungenen Zersplissenheit. *Die formelle Bildung trat in ausschließenden Gegensatz zu der materiellen*; die materielle Seite des Rechnens wurde nicht in ihrer selbstständigen Berechtigung, als Zweck, und zwar *in ihrer Einheit mit dem formellen Zweck* anerkannt, sondern nur als ein Mittel für denselben betrachtet, und darum auch nur insoweit gewürdigt, als sie eben Mittel war. Man trennte „reines" und „angewandtes Rechnen von einander, um „die Lückenlosigkeit in dem Entwickelungsgange des kindlichen Geistes" nicht zu gefährden, und suchte von demselben Gesichtspunkte aus die Anwendungsfälle in ihrer Gesondertheit von der reinen Zahl systematisch zu ordnen.

Wenn die erste Periode nur von einem „Zifferrechnen" wußte, so wollte die zweite nur das „Kopfrechnen" anerkennen; das erstere wurde als ein Appendix hintenangestellt und in einem besonderen Kursus behandelt. Die Gegensätze, so notwendig und heilsam sie auch waren, um in den toten Mechanismus des Rechnens wieder eine lebendige Seele zu bringen, und der handwerksmäßig mit Ziffern arbeitenden Hand wieder den die Zahl anschauenden „Kopf" zuzugesellen — sind doch immer Extreme. So läßt *Kawerau* seinen Lehrgang des Rechnens in vier abgesonderte Rubriken zerfallen:

a) Kopfrechnen ohne Zehnerordnung,
b) Kopfrechnen mit Zehnerordnung,

c) Zifferrechnen,
d) Angewandtes Rechnen.

So ist in dem rühmlichst bekannten Werke von Tillich *) der rein formelle Zweck durchaus vorherrschend, und wenn auch bereits der wissenschaftliche Gesichtspunkt, die Rücksicht auf eine abgerundete Darstellung des Objekts festgehalten wird, doch keine Durchdringung des formellen Prinzips mit dem materiellen. So läßt Krancke (der übrigens unter Männern, die mit eigentlicher Vertiefung in die Sache einem bildenden Rechenunterrichte die Bahn brachen, in der ersten Reihe steht), den ganzen ersten Kursus **) im Zahlraum von 1 bis 1000 ohne allen Gebrauch der Ziffer und statt dieser mit Punkten rechnen, bei denen für die höheren Einheiten die symbolische Darstellung mit Dreiecken, Quadraten ꝛc. zu den anschaulichen hinzutritt. Wenn nun auch das Zweckmäßige dieses Verfahrens, als eines heilsamen Gegensatzes zu dem Extrem der ersten Periode, und eines für die gründliche Erkenntnis der Zahlenverhältnisse schätzbaren Förderungsmittels, an sich nicht zu verkennen ist, so mußte es doch bald unnütz werden, sobald ein gründlicher, bis in's Kleinste durchgebildeter Rechengang erreicht war. Eine ruhige Ansicht des Gegenstandes überzeugte bald, daß im Wesen des elementarischen Rechnens gar kein Unterschied Statt findet zwischen einem Kopf- und Zifferrechnen, sondern daß derselbe nur da eintritt, wo man Behufs der Fertigkeit in der Operation (bei größeren Zahlen und verwickelteren) Aufgaben die Ziffer anwendet, und damit der aus unserem Zahlensystem hervorgehenden Art, die Zahl zu schreiben, sammt gewissen daran sich knüpfenden Regeln zu folgen genötigt ist, welche aber die Gesetze des Objekts als Wissenschaft gar nicht berühren †).

Mit der Ausgleichung der erwähnten Gegensätze hat die dritte Periode begonnen. Dieser liegt es ob — denn sie ist noch nicht abgeschlossen — die Rechte des Objekts, die in der zweiten über der einseitigen Bildung des Subjekts verkannt waren, geltend zu machen, die subjektive Methode mit der objektiven zu durchdringen, eine organisch-entwickelnde Methode für das Rechnen zu gewinnen. Das Rechenwerk von Scholz ††),

---

*) Allgemeines Lehrbuch der Arithmetik, oder Anleitung zur Rechenkunst für Jedermann von Ernst Tillich, Leipzig 1806. Zweite mit einem praktischen Teile vermehrte Auflage von M. Lindner, 1821.

**) „Rechenfibel" oder „Leitfaden und Exempelbuch für den Elementarunterricht im Rechnen." Elfte Auflage. Hannover, Hahn'sche Hofbuchhandlung, 1873. Dazu die: „Anleitung zu einem zweckmäßigen Unterrichte im Rechnen, vorzüglich zum Elementarunterricht ꝛc." ferner: „Hilfsbuch beim Unterricht im Kopfrechnen ꝛc." Zweite Auflage. Ebendas.

†) Sehr gut ist dieser Punkt auseinander gesetzt in einem lesenswerten Aufsatze von Zehlicke: „Über den Elementarunterricht im Rechnen", Mecklenburger Schulblatt 1834 und 1836.

††) „Faßliche Anweisung zum gründlichen Kopf- und Zifferrechnen", 3 Teile. Halle bei Anton. (Vierte Auflage.) Dazu 3 Hefte: „Aufgaben für das Zifferrechnen" und 3 Hefte: „Aufgaben für das Kopfrechnen". Ebendas. — Jetzt ist die sechste Auflage unter dem Titel: „Praktischer Rechenlehrer ꝛc." erschienen, und eine größere Berücksichtigung des mathematischen Elements darin zur besonderen Empfehlung des Werkes in seinem neuesten Gewande zu rühmen. — Ein sehr dankenswerter Beitrag zur Vereinfachung des elementaren Rechnens

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA
Digitized by Google

als der erste Versuch einer methodisch-vollständigen Anweisung, jene Gegensätze zu vermitteln, fand darum allgemeinen und wohlverdienten Beifall. Unter der Menge nachher erschienener ist als die bewährteste Schrift die von Diesterweg und Heuser*) zu nennen.

In beiden Werken ist die Verbindung des Kopf- und Zifferrechnens, des reinen und angewandten Rechnens, des materiellen und formellen Zweckes angestrebt, aber die organische Durchdringung dieser beiden Gesichtspunkte in der Weise, daß die Entwickelung und der Fortschritt des Stoffes zusammenfällt mit der Entwickelung des kindlichen Geistes, das für das Objekt wie für das Subjekt jede folgende Stufe eine mit Notwendigkeit aus der vorhergehenden sich entfaltende, und ebenso immer die notwendige Entwickelungsbasis für die ihr folgende darstellt, ist — nach unserer Ansicht — in beiden nicht erreicht.

Die Notwendigkeit einer strengen Aufeinanderfolge des Rechenstoffes hat bereits in der zweiten Periode der wackere Tillich geltend gemacht, und dadurch den Pestalozzischen Geist wesentlich weiter gebildet, daß er neben dem subjektiven Gesichtspunkte auch den objektiven aufstellt, überall vom Leichteren zum Schwereren, vom Einfacheren zum Zusammengesetzteren lückenlos fortschreitet, und die Übungen dergestalt ordnet, daß die eine die andere vorbereitet und aus sich hervorgehen läßt; aber diese Anordnung des Rechenstoffes bleibt die der abgeschlossenen abstrakten Wissenschaft, es ist der Lehrer, welcher auf jeder Stufe dem Schüler voranschreitet und diesen auffordert, ihm nachzufolgen. Dieser Mangel ist aber in den angeführten Werken der dritten Periode noch nicht beseitigt. Die Anweisung von Scholz gibt uns ein kompliziertes Gebäude von einzelnen Übungen, die aus der subjektiven Methodik hervorgegangen keineswegs in der Verbindung stehen, wie sie den Fortschritt ihrer Entwickelung selber in sich tragende Zahl fordert. Diese Masse und Zersplitterung der Übungen läßt den Schüler nicht zur wahren Freithätigkeit, weil nicht zum Bewußtsein der Einheit in seiner Thätigkeit, wie sie aus der Einheit des Stoffes unmittelbar resultiert, kommen. Die einzelnen Stufen liegen alle neben- statt ineinander; es ist nicht der Gegenstand, der in seiner Entwickelung den Schüler von einer Stufe zur anderen emporhebt, sondern die den Gegenstand zurecht schneidende und reckende Methodik*). Bei Diesterweg und Heuser ist zwar

---

ist vom Seminardirektor Goltzsch geliefert worden: „Der Rechenunterricht in der Volksschule von E. T. Goltzsch u. F. W. Theel. 1854." — Um meinen Leitfaden noch praktischer und mehr mundrecht zu machen, sind erschienen: „Übungen im Rechnen für Elementarschulen von J. Schmidt, Lehrer in Nürnberg. (Erstes Heft, Zahlenraum von 1—100)". So sehr ich das Streben des Verf. anerkenne, muß ich doch dem beipflichten, was der Recensent im Südd. Schulboten (1855, 8. H.) darüber bemerkt. Ich dächte, auch mein „Lehrgang" wäre klar und einfach genug, um seinem Wesen nach leicht gefaßt zu werden. Nicht das Breitere, sondern das Tiefere habe ich gesucht, und wollte dazu anregen.

*) „Methodisches Handbuch für den Gesammt-Unterricht im Rechnen", Elberfeld bei Büschler 1829 und 31, jetzt in 6. Aufl., Gütersloh bei Bertelsmann, 1866. Dazu: „Praktisches Rechenbuch ꝛc." Von Denselben. Ebendas.

**) Im Gefühl der Einseitigkeit seines größeren Werkes hat Scholz zwei

mehr Durchsicht, mehr Streben zur Einheit des Mannigfaltigen, aber diese ist wiederum nicht die Einheit des Objektes, sondern die des Verstandes, dem die Gegenstände untergeordnet und unterworfen sind für den psychologischen (subjektiven) Zweck des Unterrichts. So bleibt das Subjekt die überwiegende Seite, das Objekt aber ein dem abstrakten Schema unterworfenes — Regelrechnen. So lange nämlich die vier Spezies für die reine Zahl, die „Rechnungsarten" für die angewandte Zahl das Prinzip bilden, nach welchem man das ganze Rechnen anordnet: setzt man ein a priori Aufgestelltes, eine Operation als Regel oder Schema an die Spitze, und läßt danach nun sämmtliche dahin einschlagende Übungen vornehmen. „Jetzt ist das Addieren an der Reihe," und nun wird Alles, was von Exempeln gegeben wird, addiert — „jetzt ist die Proportionslehre absolviert," und nun werden die Rechnungsarten nach dem Schema des Proportionansatzes ausgeführt. Wenn auch keine in Worte gefaßte Regeln hier mehr an die Spitze gestellt werden, so mutet man doch dem Schüler zu nach einem allgemeinen Plane zu operieren, von dem er nicht absieht, wie er aus dem Einzelnen seiner Thätigkeit hervorgeht. So wäre z. B. der naturgemäße Weg der, daß der Schüler erst aus einer Reihe von Aufgaben den Proportionsansatz, als eine bequeme Regel zur Berechnung ähnlicher Aufgaben abstrahierte, und nicht umgekehrt, daß er vorher das abstrakte Schema zur Berechnung der nachfolgenden Aufgaben bekäme. Ein selbstständiges zusammenhängendes Folgern muß da wegfallen, weil alle Aufgaben nach einem Musterbeispiele gelöst werden. Auf diesen Übelstand wurde dann auch von mehreren Seiten aufmerksam gemacht; die erste praktische Ausführung aber jener Idee, die sogenannten Rechnungsarten von der Regel der Proportion für das elementare Rechnen loszumachen, gab Hentschel in seinen „Hundert Aufgaben" *).

Hiermit war zugleich das Rechnen von seinem subjektiven Unterschiede als Kopf- und Zifferrechnen zu dem höheren und wesentlichen Gegensatze von Regel- und Denkrechnen hingetrieben, so daß für das Denkrechnen wie für das Kopfrechnen der Gegensatz von Kopf- und Zifferrechnen als

---

Büchlein „Zahlendenkübungen" herausgegeben, worin er ganz meinen Ideen folgt, ohne derselben mit Einem Worte Erwähnung zu thun. Im Bestreben, Alles zu erschöpfen, hat er den Stoff allzubreit getreten, so daß die Übersichtlichkeit schwindet. Eine neuere Schrift von Dagott (die Zahlen von 1—100, 2te Aufl., Brannsberg 1855) hat mit praktischem Sinn meine Methode für Ungeübte handrecht zu machen gesucht, und sei ihres Bemühens hier anerkennend Erwähnung gethan. Ein sehr handliches, brauchbares Werkchen, das den Geist meiner Methode in sich aufgenommen hat und dabei sich doch selbstständig und mit methodischer Gewandtheit bewegt, ist das Rechenbuch für die Volksschule von Alb. Haesters (Essen 1879), und Friedr. Schütze's Deutsche Kopfrechenschule (Langensalza, Herm. Beyer, 1868 in 4ter Aufl.) mit gut gewählten und behandelten Beispielen, namentlich in der Bruchrechnung.

*) „Hundert Aufgaben, elementarisch gelöst". Oder: „Praktische Anleitung, die Aufgaben der einfachen und zusammengesetzten Regeldetrie, der niederen Wechselrechnung, der Diskonto-, Termin- und Rabattrechnung, so wie der Gesellschafts- und Mischungsrechnung ohne Anwendung der Proportionen zu lösen". Weißenfels, Meusel 1837. 5te Aufl. Leipzig, Merseburger 1868. — Ein allen Elementarlehrern bestens zu empfehlendes Büchlein.

rein untergeordnet sich darstellt. Die Sache ist, wie sie Hentschel in der Einleitung*) des angeführten Werkes kurz bezeichnet, diese:

Rechnen

Denkrechnen	Regelrechnen.
Kopfrechnen, Zifferechnen.	Kopfrechnen, Zifferrechnen.

Unser bisheriges Rechnen ist aber, wenn auch von der subjektiven Seite, d. h. für den lernenden Schüler betrachtet, zu der psychologisch-richtigen Methode gelangt, doch von seiner objektiven Seite, in Bezug auf die Arithmetik angesehen, durchaus ein Regelrechnen zu nennen, weil es — wie schon erwähnt — den Inhalt nach gewissen allgemeinen und (noch ehe der Schüler seine Operation beginnt) fix und fertigen Formen abteilt, und das Spezielle der vorliegenden Aufgabe rückwärts auf das allgemeine Schema bezieht.

Nachdem hier also die sogenannten Proportionsrechnungen glücklich von der Regel losgemacht waren, kam es nur darauf an, das ganze elementarische Rechnen von dem ihm noch anhängenden Regelwerk zu befreien, und es der objektiv-mathematischen, d. h. nicht der einseitig abstrakten der ersten Periode, sondern der zugleich anschaulichen vom Einzelnen zum Allgemeinen hin sich bewegenden Methode zu unterwerfen. Das ist denn auch zuerst und am vollständigsten geschehen in dem Leitfaden von Unger**), und der Grundsatz, das Rechnen müsse die Mathematik der Volksschule sein, in einer Weise ausgeführt, wie wir der Art noch kein Werk haben. Wenn wir davon absehen, daß noch manches bloß Individuelle in der hier durchgeführten Methode mit unterläuft, auch davon, daß das wichtige mathematische Element, Form durch Zahl zu bestimmen, wir meinen die Auflösung der algebraischen Aufgaben durch Anschauung†), noch nicht so berücksicht ist, wie es „eine Mathematik der Volksschule" verlangt: so ist doch das konsequent ausgeführt, was wir oben als notwendig für einen

*) S. V. heißt es hier: „Ich verlange nicht, daß der Schüler meine Aufgaben ausschließlich im Kopfe rechne; wo die Zahlen zu groß werden, da mag er immerhin das Notwendigste notieren. Nur von Regeln und Formeln sei nicht die Rede! Es ist auch in wohlbedachter Absicht geschehen, daß ich die Exempel ohne Angabe der Rechnungsarten zusammengestellt habe. Die Namen machen's nicht; an die Sache halte sich der Lernende. Er werde sich der Beziehungen klar bewußt, in welchen Zeit, Raum, Kraft, Wirkung, Menge, Gewicht ꝛc. zu einander stehen, dann vermehre oder vermindere er die gegebenen Zahlen nach bestem Dafürhalten. Das ist Alles."

**) „Leitfaden für den Unterricht im Kopfrechnen, als Grundlage eines zweckmäßigen Rechenunterrichts überhaupt. Für Elementarlehrer, so wie für diejenigen, die sich selbst unterrichten wollen. Nach einer eigentümlichen Methode bearbeitet von Dr. E. S. Unger." Erfurt, Keyserſche Buchhandl. 1841. (Der Verfasser hätte den Titel seines Werkes nur passender als Leitfaden für das „Denkrechnen" bezeichnen sollen.)

†) Hentschel hat auch hier gute Bahn gebrochen. Man sehe: „Über algebraische Aufgaben als Förderungsmittel eines bildenden Rechenunterrichts in Volksschulen" in Zerenners Mitteilungen ꝛc. Halle bei Kümmel. Vergl. den Aufsatz: „Über anschauliche Auflösung algebraischer Aufgaben" von Otto Schulz im 4ten Heft des Brandenb. Schulblatts 1841.

intensiv-bildenden (sittlich einwirkenden) Rechenunterricht postulierten: eine organische Gliederung des Rechenstoffes aus dem Wesen der Zahl heraus, wo das mathematische Objekt, und nicht die Operation und Regel das Einteilungsprinzip abgiebt. Nur über den Anfang seines Lehrganges scheint der Verfasser im Unklaren zu sein. Wenn er für denselben bloß „das Zählen" voraussetzt, so setzt er zu wenig voraus, und wenn er den Unterricht in den vier Grundrechnungen als ein „Regelrechnen" faßt, das so nebenbei, und zwar „so schnell als möglich" abgethan werden müsse, so hat er eine zu geringe Meinung von diesen ersten Übungen. Sein Leitfaden gehört aber für die Volksschule (vergl. Einleit. S. 9), als in welcher der eigentliche arithmetische Unterricht beginnt, welcher einen propädeutischen der Elementarschule zur Voraussetzung hat, worin eben die Spezies mit ganzen und gebrochenen Zahlen zur Fertigkeit gebracht werden. Dieser propädeutische Rechenunterricht aber muß als wesentliche Grundlage in organische Verbindung mit dem ihm nachfolgenden gebracht werden, und vom ersten Anfang ein „Denkrechnen" sein, d. h. vom Wesen der Zahl seinen Ausgangspunkt haben, und in der Entwickelung dieses rein arithmetischen Stoffes seine organische Gliederung finden. Das schriftliche Rechnen bleibt dann kein bloßes Regelrechnen mehr, sondern wird nur die Übung und Fertigkeit in der vorher systematisch entwickelten Anschauung. — Damit sind wir denn auf den Punkt gelangt, die Methode für einen bildenden Rechenunterricht in der Elementarschule zu bestimmen.

Wie das spätere Rechnen von dem abstrakten Regelwerk der „einzelnen Rechnungsarten" loszumachen ist, so sind die elementaren Vorübungen von dem Formalismus der „Spezies" zu befreien. So lange die Einteilung dieses elementaren Teils vom Rechenunterrichte in die vier Spezies beibehalten wird, kann es auch nicht zu einer lebendigen Durchdringung der subjektiven und objektiven Methode kommen. Diese Zersplitterung des Stoffes ist noch ein Überbleibsel aus jener ersten Periode, und hat nur für das Zifferrechnen Bedeutung, so lange dieses nämlich im Gegensatze zum Kopfrechnen festgehalten wird, welcher Gegensatz aber — wie wir gezeigt — ein unwesentlicher, darum nicht maßgebender ist. Das elementare Rechnen nach den Spezies auseinanderfallen zu lassen, ist dasselbe, als im „Anschauungsunterrichte" dem Kinde die Gegenstände nach den Rubriken von Größe, Gestalt, Farbe ꝛc. vorzuführen, oder die Botanik mit dem Linné'schen Systeme zu beginnen. Wie aber das Kind den Gegenstand nicht kennen lernt, wenn es nach einem Merkmal verschiedene Gegenstände anschaut, sondern wenn es den einen Gegenstand nach seinen verschiedenen Merkmalen betrachtet — und wie es falsch ist, dem Anfänger in der Botanik die Pflanzen so vorzuführen, daß er erst nur die Wurzel, dann den Stengel ꝛc. anschaue, da er vielmehr die Pflanze ganz sieht und sehen soll: so lernt der Schüler auch z. B. die Zahl 4 nicht kennen, nämlich mit wahrer Durchdringung des Objekts, wenn er heute $2+2=4$ lernt, nach einigen Wochen, wenn das Subtrahieren an die Reihe kommt, $4-2=2$ ꝛc. Vielmehr hat er ja, wenn er weiß, daß $2\times 2=4$, damit zugleich die übrigen Anschauungen: $2+2=4$, $4-2=2$, $2:4=2$, und die Methodik hat Unrecht, wenn sie diesen objektiven

Zusammenhang „nach den Operationen" zerreißt. Eine solche Teilung stärkt aber nicht, sondern schwächt die Kraft der Anschauung, weil sie deren Konzentration auf Einen Punkt und somit das „Beobachten im Anschauen" hindert. Der Elementarschüler lerne die Zahlen nicht vereinzelt und abgerissen nach den Operationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens und Dividierens, sondern jede Zahl (im Raume von 1 — 100) allseitig nach jenen Operationen in ihrer organischen Einheit kennen und behandeln.

Hier ist nun unter unsern Methodikern für die Anfänge des Rechenunterrichts wieder Krancke gebührend anzuerkennen. Er gehört zu denen, welche der angedeuteten Idee vom Organismus im Rechnen sich am meisten nähern, und auf ein mehr heuristisches Verfahren von Seiten des Lehrers, auf ein mehr selbstthätiges Anschauen von Seiten des Schülers hinarbeiten. Zu diesem Zwecke vermeidet er auf der ersten Stufe jene Sonderung des Zählens und der Spezies; dringt vielmehr darauf, daß der Schüler, sobald er eine Zahl kennen gelernt habe, sogleich mit derselben rechne. So erklärt er sich (Anleitung zu einem zweckmäßigen Unterricht ꝛc. S. 85) ganz bestimmt dahin: „Dieser Gang (des ersten elementaren Rechnens) kann nicht nach der gewöhnlichen Reihenfolge der vier Grundrechnungen gebildet werden, ebensowenig, daß der Schüler erst hintereinander bis zu einer gewissen Höhe zählen, und dann rechnen lerne. Der Schüler muß notwendig zählen und rechnen zugleich lernen. So wie er die Vorstellung einer höheren Zahl gewinnt, lerne er zugleich alle möglichen oder doch mannigfache Verknüpfungen dieser neuen Zahl mit der vorhergehenden vornehmen." — Aber in praxi läßt K. die folgende Zahl nur mit der „vorhergehenden" vergleichen, jene somit nur einseitig anschauen, anstatt daß alle vorangegangenen Anschauungen in den folgenden sich wiederholen, jede folgende Zahl mit der ihr vorangegangenen gemessen werden sollte*). Dazu zersplittert er nach den ersten Übungen den Stoff wieder auf die alte Weise, so daß die objektive Einheit, als das Ganze beherrschend, keineswegs hervortritt.

Da der Zahlraum, welcher der Anschauung unmittelbar offen liegt und zugänglich ist, der von 1 bis 100 ist, und alles Rechnen mit größeren Zahlen nur durch Beziehung derselben auf das erste Hundert bewerkstelligt wird; so muß in diesem Raume jede Zahl nach ihren verschiedenen Bestandteilen klar vor der Seele des Schülers stehen; aus der allseitigen Anschauung der einzelnen Zahlen müssen die Operationen der Spezies von selbst hervorgehen, und selbst die angewandten Aufgaben nur dazu dienen, um die Vorstellung der reinen Zahl desto mehr zu befestigen; dabei endlich müssen die einzelnen Stufen in einem solchen organischen Zusammenhang stehen, daß die eine sich in der anderen wieder und reicher entfaltet. Nur so wird der Grund gelegt für ein schnelles Kopfrechnen sowohl wie für ein gründliches Denkrechnen.

*) Nämlich im Zahlraume von 1 bis 100, um den es sich hier zunächst handelt.

Der Schüler empfängt das nötige Material, das er dann später zu jeder Operation gegenwärtig und bereit hat.

Verweilen wir, um den Gegensatz unsers „Denkrechnens" und des bisherigen „Regelrechnens" mehr hervorzuheben, noch etwas bei den oben besprochenen Anweisungen von Scholz und Diesterweg. Bei ersterem muß der Schüler, um z. B. jene vier Sätze von der 4 zu erfahren, zwanzig Paragraphen durcharbeiten, und dann hat er sie immer noch zerstreut und abgerissen; und was Scholz zuletzt in einer Nebenübung von §. 20 giebt, nämlich „allseitiges Anschauen der Zahlen", damit fangen wir an, das machen wir zur Hauptübung, und vereinigen in einem Paragraphen jene 20 Paragraphen. Bei den Brüchen ist jene Zerstückelung wo möglich noch größer. So werden in dem praktischen Rechenbuche von Diesterweg die Brüche unter folgenden Rubriken behandelt:

1) Vorübungen,
2) Das Aufheben der Brüche,
3) Ungleichnamige Brüche durch größere Zahlen darzustellen,
4) Resolution in Brüchen,
5) Reduktion in Brüchen,
6) Addieren,
7) Subtrahieren ꝛc.,

während in der allseitigen Anschauung eines Bruches das Alles beisammen ist. Die Anschauung z. B. eines Sechstels involviert folgende:

$6 : 1 = \frac{1}{6}$*), $6 : 2 = \frac{2}{6}$, $6 : 3 = \frac{3}{6}$ ꝛc.
$6 \times \frac{1}{6} = 1$, $6 \times \frac{2}{6} = 2$, $6 \times \frac{3}{6} = 3$ ꝛc.
$\frac{1}{6} : 1 = 6$**), $\frac{1}{6} : 2 = 12$, $\frac{1}{6} : 3 = 18$ ꝛc.
$2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $3 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $4 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ꝛc.
$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ ꝛc.

Ferner: $\frac{1}{6}$ Thlr. = 5 Sgr., $\frac{3}{6}$ Thlr. = 10 Sgr. = $\frac{1}{3}$ Thlr. ꝛc.
$5 : \frac{1}{6}$ Thlr. = 1 Sgr. = $\frac{1}{30}$ Thlr.
$3 \times \frac{1}{6}$ Thlr. = $\frac{1}{2}$ Thlr.
$3 : \frac{1}{2}$ Thlr. = $\frac{1}{6}$ Thlr.
$\frac{1}{2}$ Thlr. + $\frac{1}{3}$ Thlr. = $\frac{5}{6}$ Thlr.
$\frac{1}{6}$ Thlr. + $\frac{1}{3}$ Thlr. + $\frac{1}{2}$ Thlr. = $\frac{6}{6}$ Thlr. = 1 Thlr.
ꝛc. ꝛc.

Mit dem gerügten Schematismus hängen jene Reihenfolgen zusammen, die für den Anfang des Rechnens ganz unzweckmäßig sind. So läßt Diesterweg (methodisches Handbuch ꝛc.) das Rechnen mit dem Zusammenzählen beginnen in der Weise: Ein Strich; ein Strich und ein Strich sind zwei Striche; zwei Striche und ein Strich sind drei Striche ꝛc.; auf eins folgt zwei, auf zwei folgt drei ꝛc. ꝛc.; das ist der erste, das ist der zweite, das ist der dritte Strich ꝛc. ꝛc.; eins ist einmal eins, zwei ist zwei mal eins, drei ist drei mal eins ꝛc. ꝛc.; dann mit der Zwei zusammenzählen, dann mit der Drei. Diese Übungen müssen sich aber am Schlusse jeder Übung von selbst ergeben und brauchen nicht erst gelernt zu werden.

*) 6 steckt in 1 $\frac{1}{6}$mal oder mit seinem 6ten Teile 1mal.
**) $\frac{1}{6}$ steckt in 1 6mal.

Ist die Sechs oder die Neun allseitig angeschaut, dann mag man diese Anschauungen in Reihenfolgen, wie;

$1 + 1 = 2,\ 2 + 1 = 3,\ 3 + 1 = 4,\ 4 + 1 = 5,\ 5 + 1 = 6.$
$1 \times 1 = 1,\ 2 \times 1 = 2,\ 3 \times 1 = 3,\ \ldots\ 6 \times 1 = 6.$
$1 + 2 = 3,\ 2 + 2 = 4,\ 3 + 2 = 5,\ 4 + 2 = 6.$
$6 - 1 = 5,\ 5 - 1 = 4,\ \ldots\ 2 - 1 = 1.$
$6 - 2 = 4,\ 5 - 2 = 3,\ \ldots\ 3 - 2 = 1.$

oder für die Neun:

$1 + 3 = 4,\ 2 + 3 = 5,\ \ldots\ 6 + 3 = 9.$
$1 \times 3 = 3,\ 2 \times 3 = 6,\ 3 \times 3 = 9.$
$9 - 3 = 6,\ 8 - 3 = 5,\ \ldots\ 4 - 3 = 1.$
$9 - 3 = 6,\ 6 - 3 = 3,\ 3 - 3 = 0.$ ꝛc.

den Schüler übersehen lassen, aber nicht damit anfangen. Sonst führt ein solches Hersagen von Reihen nicht zu der beabsichtigten Durchdringung der Zahl, sondern nur zu leicht zum Mechanismus und Gedächtniswerk, weil das Sprachgesetz in Bildung der Zahlwörter so einfach ist, und dem Schüler zum Nachteil seiner Anschauung hilft. Man lernt die Zahl nicht gründlich kennen, wenn man eine ganze Reihe derselben erst mit der Eins, dann mit der Zwei u. s. f. mißt, sondern wenn man die eine Zahl gleich von vorn herein mit der Eins, Zwei ꝛc. mißt. Wenn Diesterweg für den Elementarkursus der Formlehre in dem Anschauungsunterricht („Der Unterricht in der Kleinkinderschule" ꝛc. 5te Aufl. Bielefeld 1852) jeden Körper erst einzeln, nach seinen verschiedenen Merkmalen betrachten läßt, und dann die nach ihren verschiedenen Merkmalen betrachteten Körper nach gewissen gemeinschaftlichen Merkmalen, als nach den Flächen, Kanten, Ecken ꝛc. zusammengestellt und vergleichen läßt: so ist das der natur- und zweckgemäße Weg, von dem wir nicht absehen, warum er nicht ebenso für das elementarische Rechnen eingeschlagen wird. Die einzelnen Anschauungen einer Zahl von einander gerissen und ohne ihren Zusammenhang im Ganzen sind unfruchtbare und unlebendige Teile, keine Glieder.

Was nun das Kopf- und Tafelrechnen betrifft, so hat man beides wohl insoweit verbunden, daß dieses von jenem angebahnt wird, aber beide stehen doch noch zu isoliert neben einander. Wir haben es schon erwähnt, daß für den Kursus der Anschauung gar kein Unterschied existiert zwischen einem Kopf- und Zifferrechnen, beides ist dasselbe Denkrechnen. Darum muß, wie die Vorstellung sich unmittelbar in dem äußeren Zeichen des Wortes ausprägt, auch für den ersten Kursus an die durch Striche oder Stäbe ꝛc. anschaulich gemachte Zahl die Ziffer als ein entsprechendes Zeichen unmittelbar hinantreten, auf daß die Anschauung von Ziffer und Zahl um so fester sich amalgamiere. Darum ist im Anfange jede Stunde zugleich eine Stunde des Kopf- und Tafelrechnens und erst in einem folgenden Kurse (der Übung) mag Behufs der Fertigkeit das Zifferrechnen mit seiner eigentümlichen Behandlung sich absondern.

Ferner: Man hat wohl das reine Rechnen mit dem angewandten verbunden, aber beides steht ebenfalls noch nicht

in einem organiſchen Zuſammenhange. Es genügt nicht, daß die reine Zahl an irgend einem Orte überhaupt einmal zur Anwendung kommen, ſondern ſie muß für ihre allſeitige Beſchauung ſogleich zur Anwendung gebracht werden; erſt dann iſt ſie gründlich angeſchaut, wenn ſie in ihrer Nacktheit und in dem Gewande ihrer Anwendung zugleich angeſchaut iſt. Das „Rechnen“ beſteht in der ungetrennten Einheit der beiden Thätigkeiten, des Erkennens der Zahlverhältniſſe als ſolcher, und ihrer Verknüpfung mit der Praxis des Lebens. Wer bloß die erſtere Thätigkeit auszuüben verſteht, mag er auch alle Zahlen nach allen Spezies noch ſo gut zu behandeln wiſſen, kann darum noch nicht rechnen. Darum gehört zu einer für den Zweck des praktiſchen Rechnens genügenden allſeitigen Auffaſſung einer Zahl dieſe theoretiſch-praktiſche Thätigkeit. Iſt z. B. die Zahl 6 in den reinen Zahlenverhältniſſen, als 6×1, 3×2 ꝛc. erfaßt, ſo reihet ſich unmittelbar daran die Anwendung, d. h. die Verknüpfung dieſer Anſchauungen mit den in den Geſichtskreis des 6jährigen Kindes fallenden Beziehungen des Lebens, als z. B.: Wenn 1 Semmel 1 Pfennig koſtet, was koſten 6 Semmeln? Wenn 6 Semmeln einen Sechſer (6 Pfennig) koſten, wie teuer iſt eine? Wenn 1 Semmel 2 Pfennig koſtet, was 3 Semmeln? Wenn 3 Semmeln 6 Pfennig koſten, was eine? Wenn 1 Lot Zucker 2 Pfennig koſtet, was 3 Lot? ꝛc. Man verwechſele dieſes eigentlich „angewandte“ Rechnen nicht mit dem bloß „benannten.“ Das elementariſche Rechnen iſt eigentlich immer benanntes, da die Zahl immer an gewiſſen Objekten angeſchaut werden muß, ſeien dies nun Striche oder Stäbchen oder Lot oder Pfennig. Damit das Kind ſich die reine Zahlvorſtellung abſtrahieren lerne, wird mit den „Benennungen“ gewechſelt. Weil aber hierbei die Ausdrücke der Operation, als zähle hinzu, nimm weg, vervielfache ꝛc. beibehalten werden, ſo findet auch der eigentümliche Prozeß der Anwendung noch nicht Statt, welcher eben in der Erkenntnis der Notwendigkeit des Zuſammenhanges jener Operation des Hinzuthuns, Wegnehmens ꝛc. mit den Fällen des praktiſchen Lebens beſteht. So muß der Schüler in dem konkreten Falle: Wenn 1 Lot Zucker 2 Pfennig koſtet, was koſten 3 Lot? den allgemeinen Satz: „Wenn ich eine Ware 3 mal nehme, ſo muß ich auch den Preis dafür 3 mal hinlegen,“ abſtrahieren und als den Grund erkennen, die Operation 3×2 Pfennig $= 6$ Pfennig, als Löſung der Aufgabe vorzunehmen. Iſt der Schüler in Beziehung auf die Sechs dahin gelangt, ihre reinen Verhältniſſe in dem Gewande der Praxis zu erkennen, dann hat er ſie allſeitig und gründlich erkannt. Nun meinen wir aber, daß Behufs dieſer allſeitigen Anſchauung das Zahlobjekt fixiert werden muß, damit man die organiſche Einheit, in welcher alle jene Verhältniſſe der reinen Zahl und der Anwendung ihren Mittelpunkt finden, und um welche ſie wie um ihren Kern ſich herumzulegen haben, nicht ſtöre. So wird der Schüler gleichſam von ſelbſt darauf geführt, die Verhältniſſe der vor ſeinen Augen ſtehenden Zahl aus der Kombination des Begriffs in ihrer Anwendung herauszuerkennen, dieſes Mannigfaltige der Anſchauung auf die Einheit der reinen Zahlanſchauung zu beziehen. Damit iſt dann zugleich ein organiſcher Fortſchritt für die Reihenfolge der angewandten Aufgaben gegeben. Wie ſich das reine Rechnen zu immer vielſeitigeren und darum ſchwieri-

geren Kombinationen entfaltet, ebenso zugleich das angewandte; beide sind für das elementarische Rechnen eng verbunden!

Man glaube nicht, daß, wenn wir bei der Sechs schon Aufgaben aus der sogenannten Multiplications- und Divisionsregeldetrie zur Anwendung bringen, dies für die Kleinen zu schwer sei. Gerade diese unmittelbare Verknüpfung des reinen und angewandten Rechnens erleichtert dem Kinde den oben angeführten Prozeß. Wenn ich ihm die an der Tafel stehenden 6 Stäbchen in 3×2 Stück zerlege, so wird es sich leicht unter diesen Zweiern die 2 Pfennig denken, die es dem Kaufmann 3 mal für die 3 Lot Zucker hinzulegen hat. Indem es aber dasselbe Maß, daß es mit der 2 an die 6 legt, auch auf das ihm vorgeführte Lebensverhältnis von Ware und Preis überträgt, wird es unmittelbar der Verwandtschaft beider inne. Die, welche die angewandten Aufgaben nach ihrem eigentümlichen Charakter, abgesondert von den Übungen des reinen Rechnens, zusammenstellen, weil die „Anwendungsfälle nach ihrem besonderen Wesen auch besonders entwickelt werden müssen," verkennen das Wesen der Anwendung. Dasselbe ist nicht der Raum, nicht die Zeit, nicht der Preis ꝛc. an sich, sondern das Wesen der Zahl an diesen Begriffen individualisiert. Die Zahl bleibt aber immer der wesentliche Inhalt, und von diesem ist auszugehen. Natürlich darf dann das zweite Geschäft, die Erläuterung des Anwendungs-Verhältnisses nicht unterbleiben. Um das Verhältnis 12×12 auf das Größenverhältnis einer Fläche von 12 Fuß Länge und 12 Fuß Breite anzuwenden, muß auf das Wesen dieser eingegangen werden, um dem Schüler die Notwendigkeit, in diesem Falle die Länge mit der Breite zu multiplizieren, zum Bewußtsein zu bringen. Würde nun die „Flächenberechnung" zum Einteilungsgrunde gewählt, so würde in dieser Exempelreihe der Schüler bei den ersten Beispielen denken, bei den folgenden aber rein mechanisch arbeiten. Diese Seite hat auch ihre Berechtigung, aber erst nach der Erkenntnis des Wesens der Zahlen. Darum

im ersten Teile
Anschauung — Erkennen,
im zweiten Teile
Übung — Können.

Für diesen zweiten Teil, wo auch das Zifferrechnen als solches sich geltend macht, kann dann die bisherige Einteilung in Spezies ꝛc. beibehalten, jedoch muß der eine Teil stets mit dem andern durch die Anschauung so vermittelt werden, daß die Fertigkeit der Operation aus dem Bewußtsein der Anschauung hervorgehe.

3.

Einteilung des Stoffes.

Was nun die Extention des Rechenstoffes für die Elementarschule betrifft, so ist die Anordnung desselben folgende:

Ziel = Die Spezies in ganzen und gebrochenen Zahlen.
Zeit = 4 Jahre, 4 Stunden wöchentlich *).

*) Die in früheren Auflagen dieser Schrift angenommene Zahl von 3 Stun-

Erſter Kurſus.

Erſtes und zweites Jahr.

Das Rechnen mit den ganzen Zahlen von 1 bis 100.

Erſtes Jahr: Im Zahlraum von 1 bis 10 *).
Zweites Jahr: Im Zahlraum von 10 bis 100.

Zweiter Kurſus.

Drittes Jahr.

Das Rechnen mit den ganzen Zahlen über 100.

Erſtes Semeſter: Zahlraum von 100 bis 1000. Allſeitige Anſchauung.
Zweites Semeſter: Beliebige Zahlräume. Übung in den einzelnen Operationen.

Dritter Kurſus.

Viertes Jahr.

Das Rechnen mit den Bruchzahlen.

Erſtes Semeſter: Allſeitige Anſchauung.
Zweites Semeſter: Übung in den Spezies als ſolchen.

Aus dieſer durch die Natur des Objekts ſelbſt bedingten Anordnung geht hervor, daß der Schüler auf jeder Stufe ein ſelbſtändiges Ganze habe, wenn er auch ſchon nach dem 1ſten Kurſus die Schule verließe, ſo hätte er doch ſchon das ganze Rechnen in nuce kennen gelernt, und damit die Fähigkeit empfangen, dieſen Kern ſelbſt weiter zu entwickeln.

Was nun aber die intenſive Bildung betrifft, ſo meinen wir mit der entwickelten einfacheren Methode das elementariſche Rechnen ſowohl den Anforderungen an daſſelbe als Bildungsmittel für die formelle Seite der Anſchauung, wie auch damit zugleich als wirkſames Mittel für die ſittliche Bildung des Schülers einen Schritt näher gebracht zu haben. Denn

1) mit der organiſchen Entwickelung unſeres Lehrobjekts wird der Schüler zu einer in ſich ſtreng zuſammenhängenden (kontinuierlichen) Aufmerkſamkeit angeleitet, und ſeinem Geiſte die Richtung gegeben, ſich in ſich feſtzuhalten;
2) da der Schüler die Mannigfaltigkeit der Rechenoperationen überall in der Anſchauung des einen Zahlobjektes konzentrieren lernt, ſo wird er zum Beobachten der Zahl angeleitet;
3) der Schüler arbeitet mit Luſt und Liebe zum Dinge. Weil jede folgende Stufe nur eine reichere Entfaltung der vorhergegangenen iſt, ſo wird ſie auch um ſo leichter und freudiger erſtiegen in dem Maße, als der Unterricht ſelbſt fortſchreitet. Mit jeder neuen Einheit, welche der Schüler der abſolvierten Zahl hinzufügt, empfängt

---

den möchte, falls nicht ganz beſonders günſtige Verhältniſſe obwalten, eine zu geringe ſein.

*) Je nach dem Bildungsſtandpunkte der Mehrzahl der Elementarſchüler wird man auch den 1ſten Kurſus auf 3 Jahre ausdehnen müſſen.

er auch den Reiz, welcher, ſich zu der bereits gemachten Anlage organiſch geſellend, ihn treibt, nun mit der unbekannten und doch bekannten Zahl auf gleiche Weiſe zu operieren.

Wo die Liebe zur Arbeit nicht durch die Arbeit ſelbſt hervorgerufen wird, da bleiben alle Zuchtmittel und Ermahnungen vergeblich. Dieſen lebendigen Trieb für die Sache in dem Schüler zu erzeugen, iſt die Lebensaufgabe des Elementarunterrichtes, welcher für das geſammte Schulleben ebenſo für die Erkenntnis- wie für die Willens-Entwickelung den Grund legen ſoll. Weil aber das Rechnen vorzugsweiſe das rationelle Objekt der Elementarſchule iſt, ſo muß hier auch vorzugsweiſe jene Einheit des Erkennens und Willens erſtrebt werden. Ohne einen organiſch gegliederten Unterrichtsſtoff möchte aber alle Mühe des Lehrers, auf die ſittliche Bildung des Schülers zu wirken, vergebens ſein, denn nur mit dem Bewußtſein der in ſtetiger Einheit ſich entwickelnden Kraft kann in dem jungen Geiſte der Trieb entſtehen, dieſe ſelbſtthätig weiter zu entwickeln.

II. Lehrgang.

Erſter Kurſus.

Das Rechnen mit den ganzen Zahlen von 1 bis 100.

Erſtes Jahr.

Der Zahlraum von 1 bis 10.

Vorbemerkungen

1) Wir ſchärfen es nochmals recht ſehr ein, daß jede Rechenſtunde zugleich Sprachſtunde ſein müſſe. (Vergl. Einleitung S. 9). Dieſe Forderung fällt mit der einer heuriſtiſchen Methode des Unterrichts unmittelbar zuſammen. Wie der Elementarſchüler überhaupt ſtets in vollſtändigen Sätzen, laut, deutlich und mit ſcharfem Wortaccent ſprechen muß, ſo iſt beſonders für das Rechnen auf eine fließende, abgerundete und ſaubere Sprache zu dringen, und von vornherein auf die Auflöſung jedes Exempels beſonders Gewicht zu legen. So lange die Sprache für die Zahl noch nicht fertig iſt, iſt es auch die Vorſtellung der Zahl nicht, und ein Exempel iſt noch nicht ausgerechnet, wenn das „Facit" gefunden, ſondern wenn es aufgelöſt iſt. Die Sprache nehme der Lehrer als Prüfſtein, ob eine Stufe vollkommen erſtiegen ſei oder nicht.

2) Der Lehrer begebe ſich möglichſt des vielen Fragens, namentlich aller der Fragen, welche die halbe Antwort dem Schüler in den Mund legen. Der Schüler muß ſo viel als möglich ſelbſt ſprechen wollen. Ein zweckmäßiges und für die Bildung zur Aufmerkſamkeit ſehr wichtiges Hilfsmittel iſt es, wenn der Lehrer gewiſſe feſtſtehende Zeichen anſtatt der Worte einführt; als z. B. ein Halbkreis mit dem Zeigefinger der rechten Hand bedeutet: Sprich dich über das Geſchehene aus! Ein Kreis: Sprich in einem vollſtändigen Satze! Eine Bewegung mit der ganzen Hand: Chorſprechen! ꝛc.

3) Daß zur Belebung des Unterrichts Einzel- und Chorſprechen gehörig abwechſeln, iſt auch für das Rechnen wohl zu beachten. Die in Ziffern dargeſtellten regelmäßig wiederkehrenden Schemate ſind beſonders zum Chorſprechen geeignet.

4) Stereotype Anſchauungsmittel ſind die Finger und Striche; was der Lehrer ſonſt aus den Umgebungen des Kindes als Hilfsmittel für die Anſchauung herbeiziehen will, bleibt ſeinem Ermeſſen überlaſſen.

Ein Zuvielerlei von Anschauungsmitteln ist zu meiden, da es zerstreut, den Blick von der Zahl als solcher ablenkt; wohl aber ist der Gebrauch *mehrerer* Anschauungsmittel nicht nur ratsam, sondern methodisch notwendig, damit der Schüler die reine Zahlvorstellung von Farbe, Größe, Stoff des räumlich Angeschauten um so sicherer abstrahieren lerne. Diese Übung in der Abstraktion fällt weg, wenn man, wie es die Schüler Stoy's thun, nur Ein Veranschauungsmittel (die Tillich'schen Rechenhölzer) gelten lassen will.

Die Striche, die auf die Wandtafel und Schiefertafel mit großer Leichtigkeit und Schnelligkeit gezogen werden können, haben den Vorteil, daß in jedem Moment die Entstehung der Zahl sichtbar und fühlbar gemacht, die Zahl als *Zeitgröße* dem Bewußtsein gegenwärtig gehalten wird. Die Teilung, Vermehrung, Verminderung, Gruppierung kann der Schüler mit größter Leichtigkeit vornehmen. Die Zweier- Dreier- Zehner-Reihen sind aber starr. Die Vorstellung der Zahl 10 bleibt eine trübere, wenn sie dem Kinde an einem 10 Zoll langen Stabe veranschaulicht werden soll, dessen Einschnitte in der Ferne kaum sichtbar sind. Zehn Striche oder Punkte, die beiden Hände mit ihren 10 Fingern, 10 Stäbchen in ein Bündel gebunden, veranschaulichen die „Zehn" viel besser als ein Tillich'scher Holzstab, der, wie Dittes (Schule der Pädagogik S. 664) treffend bemerkt, bei aller sonstiger Brauchbarkeit doch den Fehler hat, daß er die Zahl durch räumliche Ausdehnung darstellen will, „was offenbar der reinen Zahlenanschauung Eintrag thut."

Mit dem Gesagten soll der Tillich'sche Apparat nicht verworfen, sondern nur das überschwengliche Lob, das man ihm von gewisser Seite gespendet, auf das rechte Maß zurückgeführt werde.

Die Zahl als solche hat mit der räumlichen Ausdehnung nichts zu schaffen; Ein Dutzend Äpfel kann größere und kleinere Äpfel besitzen. Da aber alles Arithmetische auch eine geometrische Seite hat (wie alles Geometrische eine arithmetische), so können wir der Raumgröße zur Veranschaulichung der Zahlverhältnisse nicht entbehren. Der Begriff des Enthaltenseins wird durch Längen- und Hohlmaße veranschaulicht und es ist ein geometrisches Hilfsmittel, wenn wir eine Linie in 2, 3, 4 gleiche Teile teilen, um die Halben, Drittel, Viertel zu veranschaulichen, — gleichwie wir an dem durch 10 Einschnitte markierten Meter zeigen, daß 1 Dezimeter 10 mal in einem Meter enthalten ist. Zur Repräsentation der Zahl 10 ist jedoch der Meterstab nicht geeignet, denn er kann ebensowohl in 100 Teile geteilt, die Zahl 100 vorstellen, oder auch ein Verhältnis zum Dekameter $\frac{1}{10}$. Die 10 Striche auf einer Tafel bleiben aber unter allen Umständen *zehn*, sie mögen dick oder dünn, kurz oder lang sein, sich näher oder ferner stehen. Indem sie vom Lehrer oder Schüler gezogen worden sind, zeigen sie auch am eindringlichsten die Entstehung der Zahlen und somit ihr Wesen als Zeitgröße.

5) Die Operation auf jeder Stufe besteht ganz einfach darin, daß jede neue Zahl mit den ihr vorangegangenen verglichen und gemessen wird, was bekanntlich nach dem Unterschiedsverhältnisse (arithmetisch) oder nach dem Teilungsverhältnisse (geometrisch) geschieht, und so ergeben sich denn auf *objektive* Weise die 4 Spezies aus der Anschauung der einzelnen Zahlen von selbst. Auf die Anschauung folgt dann jederzeit die Übung im *schnellen* Rechnen und die Darstellung in *schwierigeren Kombinationen*, als Prüfstein, ob das angeschaute Zahlenverhältnis in die Vorstellung vollkommen eingegangen ist. Diesem reinen Zahlenverhältnis muß dann das *angewandte* gegenübertreten, um jenes in diesem für das practische Rechnen erkennen und behandeln zu lehren. — So steht das eine mit dem andern in organischem Zusammenhange, und *befestigt* die Vorstellung jeder einzelnen Zahl; indem so das reine und angewandte Kopf- und Zifferrechnen, Einsicht und Fertigkeit überall Hand in Hand gehen, wird ein *selbständiges* Rechnen erzeugt.

6) Auf eine nette Darſtellung in Ziffern und Strichen iſt die nötige Zeit zu verwenden. Da ein feſtſtehendes Schema für das ſchriftliche Rechnen auf allen Stufen wiederkehrt, ſo iſt das ein gutes Mittel, die Schüler in der Freizeit (vor der Schule oder zu Hauſe) paſſend zu beſchäftigen. Die reſp. Zahl wird jedesmal zur Stunde aufgeſchrieben mitgebracht, was um ſo eher möglich wird, wenn der Lehrer die Kleinen zum früh in der Schule kommen anzuregen und ſie dann in der Zeit vor dem Anfang des Unterrichts in der angedeuteten Weiſe paſſend zu beſchäftigen verſteht.

Erſte Stufe.

Die Eins.

Da das Rechnen in dem gegenſeitigen Meſſen (Vergleichen) der Zahlen beſteht, ſo kann mit der Eins, als dem abſoluten Maße, das ſich nur ſelbſt zum Maße hat, nicht gerechnet werden. Der Schüler hat hier nur den abſtrakten Begriff der Einheit zu ſetzen, d. h. an einem Dinge konkret zu machen*).

I. Die reine Zahl.

Ein Finger, ein Strich; eines iſt ein mal eins.

Die Schüler lernen ſchreiben:

| 1

| $1 \times 1 = 1.$

II. Die angewandte Zahl.

Was in der Stube, zu Hauſe, am menſchlichen Körper nur ein mal iſt**)

Zweite Stufe.

Die Zwei.

I. Die reine Zahl,

a. Meſſen und Vergleichen.

|| 2

| 1 $\begin{cases} 1 + 1 = 2. \\ 2 \times 1 = 2. \end{cases}$

| 1 $\begin{cases} 2 - 1 = 1. \\ 1 : 2 = 2. \dagger) \end{cases}$

---

*) Man verwechſele nicht die Begriffe „Eins“ und „Einheit“. Die geſetzte Einheit (nämlich die 1 mal geſetzte) iſt die Eins. Darum iſt „Eins“ eine Zahl, ſo gut wie „Zehn“ oder „Hundert“; jede Zahl läßt ſich aber wieder als „Einheit“ für ein aus ihr entſtandenes „Vielfache“ auffaſſen.

**) Wir enthalten uns der detaillierten Ausführung des Verfahrens, als des rein Subjektiven der Methode oder der Manier und ſetzen für das reine Zahlverhältnis immer bloß das Reſultat, wie es ſich in der ſchriftlichen Darſtellung fixiert, in der Vorausſetzung, daß der Lehrer auf anſchauliche Weiſe daſſelbe zu entwickeln wiſſe. Von dieſer Seite iſt ja ſo viel, namentlich im Rechnen, geſchehen, daß der Lehrer hier einen völlig geebneten Weg hat, und es nur Raumverſchwendung wäre, hier den Lehrgang in ſeiner Breite auszuführen.

†) „Ich kann die 1 von der 2 2 mal wegnehmen“. „Eins iſt in zwei zwei mal.“. — Der Begriff des Enthaltenſeins muß überall als der elementare

2 ist 1 mehr als 1.
1 ist 1 weniger als 2.
2 ist das Zweifache von 1 oder das Doppelte von 1.
1 ist der zweite Teil von 2 oder die Hälfte von 2.

b. Schnellrechnen. —

c. Kombinieren.

Welche Zahl steckt 2mal in der Zwei?
Von welcher Zahl ist 2 das Doppelte?
Von welcher Zahl ist 1 die Hälfte?
Welche Zahl muß ich verdoppeln, um 2 zu bekommen?
Ich kenne eine Zahl, die hat 1 mehr als 1. Welche ist das?
Welche Zahl muß ich zu 1 thun, um 2 zu bekommen?

II. Die angewandte Zahl.

Fritz hatte 2 Pfennig, und kaufte sich für 1 Pfennig Kirschen. Wie viel behielt er noch?

Ein Schieferstift kostet 1 Pfennig. Wie viel kosten 2 Schieferstifte? Wie viel Pfennigstifte kannst du für 2 Pfennig kaufen?

Karl hatte in seiner Sparbüchse einen Groschen, seine Schwester hatte gerade noch einmal so viel. Wie viel hatte diese?

Dritte Stufe.

Die Drei.

I. Die reine Zahl.

a. 1) Messen mit der Eins.

| | | **3**

| 1 | 1 + 1 + 1 = 3.
| 1 | 3 × 1 = 3.
| 1 | 3 — 1 — 1 = 1. (denn: 3 — 1 = 2, 2 — 1 = 1.)
| 1 | 1 : 3 = 3. („ich kann die 1 von der 3 3mal wegnehmen, oder 1 ist in 3 3mal.")

2) Messen mit der Zwei.

| |
|

2 + 1 = 3, 1 + 2 = 3. (2 Finger zusammen)
1 × 2 + 1 = 3.
3 — 2 = 1, 3 — 1 = 2.
2 : 3 = 1 (1). (ich kann die 2 von der 3 1mal wegnehmen, und behalte 1 Rest, oder ꝛc.

3 ist 1 mehr, als 2, 2 mehr, als 1.
2 ist 1 weniger, als 3, 1 mehr, als 1.
1 ist 2 weniger, als 3, 1 weniger, als 2.
3 ist das Dreifache von 1.
1 ist der dritte Teil von 3.

---

dem des „Teilens" zum Grunde gelegt werden. — Die Bezeichnung der Operation durch Striche, als | | × | = | | , | | − | = | ꝛc. ist gar nicht anschaulich, fällt darum hier als überflüssig fort.

1 und 1 ſind gleiche Zahlen, 1 und 2, ſowie 2 und 3 ſind ungleiche Zahlen. Aus welchen gleichen, und aus welchen ungleichen Zahlen beſteht alſo 3?

b. Wie viel iſt $3-1-1+2$ geteilt durch 1?

$3\times1-2\times1+1+1-2+1+1$?

Die Antwort muß augenblicklich erfolgen.

c. Von welcher Zahl kannſt du das Doppelte von 1 wegnehmen und behälſt doch noch 1 übrig?

Welche Zahl iſt das Dreifache von 1?

Ich ſetze eine Zahl 1 mal, und noch 1 mal und noch 1 mal und erhalte 3. Welche Zahl habe ich 3 mal geſetzt?

II. Die angewandte Zahl.

Drei Pfennig nennt man einen Dreier, ſowie zwei Pfennig einen Zweier.

Wenn du dir ein Dreierbrödchen kaufen willſt, ſo mußt du wie viel Pfennig haben?

Wie viel Semmeln kauft man für 1 Dreier?

Anna ſollte auch 3 Pfennigſemmeln vom Bäcker holen; die Mutter gab ihr aber nur 2 Geldſtücke mit. Welche mögen das wohl geweſen ſein?

Karl hatte einen Spruch gelernt, ſeine Schweſter zwei mehr. Wie viel konnte dieſe?

Wenn ein Schieferſtift 1 Pfennig koſtet, ſo koſten 3 Schieferſtifte?

Bertha hatte in ihrem Garten 3 Veilchen gefunden, und trug ſie zu ihren Eltern. Dieſe ſagten, Jeder von uns dreien ſoll gleich viel nehmen. Wie verteilte ſie nun die Blumen zwiſchen Papa und Mama?

Vierte Stufe.

Die Vier.

I. a. 1) Meſſen mit 1.

| | | | 4

| 1 | 1 + 1 + 1 + 1 = 4. (1 + 1 = 2, 2 + 1 ꝛc.).
| 1 | 4 × 1 = 4.
| 1 | 4 − 1 − 1 − 1 = 1.
| 1 | 1 × 4 = 4.

2) Meſſen mit 2.

| | 2 | 2 + 2 = 4.
| | | 2 × 2 = 4.
| | 2 | 4 − 2 = 2.
| | | 2 : 4 = 2.

3) Meſſen mit 3.

| | | | 3 + 1 = 4, 1 + 3 = 4.
| | | 1 × 3 + 1 = 4.
| | 4 − 3 = 1, 4 − 1 = 3.
| 3 : 4 = 1 (1). (3 in 4 1mal, mit 1 Reſt.)

Tiere mit 4 Beinen und 2 Beinen — Fahrzeuge mit 1 Rade, 2 und 4 Rädern. Vergleichung derſelben.

4 iſt 1 mehr als 3, 2 mehr als 2, 3 mehr als 1.
3 iſt 1 weniger als 4, 1 mehr als 2, 2 mehr als 1.
2 iſt 2 weniger als 4, 1 weniger als 3, 1 mehr als 1.
1 iſt 3 weniger als 4, 2 weniger als 3, 1 weniger als 2.
4 iſt das 4fache von 1, das 2fache (Doppelte) von 2.
1 iſt der 4te Teil von 4, 2 die Hälfte von 4.
Aus welchen gleichen und ungleichen Zahlen iſt 4 entſtanden?

b. $2 \times 2 - 3 + 2 \times 1 + 1 - 2$ verdoppelt!
$4 - 1 - 1 - 1 + 1 - 3$, wie viel weniger als 4? ꝛc.

c. Welche Zahl muß ich 2mal nehmen, um 4 zu bekommen?
Von welcher Zahl iſt 4 das Doppelte?
Von welcher Zahl iſt 2 die Hälfte?
Von welcher Zahl iſt 1 der 4te Teil?
Welche Zahl läßt ſich 2 mal von 4 wegnehmen?
Welche Zahl iſt um 3 größer als 1?
Wie viel muß ich zu der Hälfte von 4 noch hinzuthun, um 4 zu bekommen?
Wie viel mal 1 hat die Hälfte von 4 weniger als 3?

II. Karoline hatte in ihrem Blumentopfe 4 Tulpen, die ſie aber ſchlecht begoß. Da verwelkten ihr erſt eine, dann noch eine und noch eine. Wie viel behielt ſie noch?
Wie viel Pfennig ſind 2 Zweier?
Wie viel Semmeln kannſt du für 4 Pfennig kaufen, wenn jede 1 Pfennig koſtet?
Wie viel Zweipfennigſemmeln aber?

So oft ich dem Bäcker 2 Pfennig hinlege, giebt er mir 1 Semmel. Ich lege ihm aber 2mal 2 Pfennig hin, alſo bekomme ich auch 2mal 1 Semmel.

| | Pfennig		| . Semmel.	
| | Pfennig		| . Semmel.	

Eine Bretzel koſtet 2 Pfennig, wie viel koſten 2 Bretzeln?
R. bezahlte für 2 Bretzeln 1 Zweier, 1 Pfennig und noch 1 Pfennig. Wie viel koſtet eine?
1 Liter oder 1 Kanne hat 2 Schoppen*), wie viel Schoppen kommen auf 2 Kannen?
Wenn 1 Schoppen 2 Groſchen koſtet, wie viel koſtet 1 Liter?

Antw. Ein Liter hat zwei Schoppen; koſtet 1 Schoppen 2 Groſchen, ſo koſten 2 Schoppen 2 mal 2 Groſchen = 4 Groſchen.

Welcher Teil von 4 Schoppen iſt 1 Schoppen? Welcher Teil von 1 Liter iſt 1 Schoppen? Welcher Teil von 2 Liter iſt 1 Schoppen?

---

*) Selbſtverſtändlich werden die Hohlmaße, wie ſpäter die Längenmaße und Gewichte vorgezeigt. Aus einem Waſſereimer wird 1 Schoppenglas gefüllt und deſſen Inhalt in eine Literflaſche gefüllt. Die Schüler überzeugen ſich durch eigene Anſchauung, daß das Waſſer genau bis zu dem bezeichneten Striche geſtiegen iſt.

Fünfte Stufe.

Die Fünf.

I. a. 1) Mit 1.

| | | | | | 5

| 1 | 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5.
| 1 | 5 × 1 = 5.
| 1 | 5 — 1 — 1 — 1 — 1 = 1.
| 1 | 1 : 5 = 5.
| 1 |

2) Mit 2.

| | 2 | 2 + 2 + 1 = 5.
| | 2 | 2 × 2 + 1 = 5.
| 1 | 5 — 2 — 2 = 1.
| | 2 : 5 = 2 (1).

3) Mit 3.

| | | 3 | 3 + 2 = 5, 2 + 3 = 5.
| | 2 | 1 × 3 + 2 = 5.
| | | 5 — 3 = 2, 5 — 2 = 3.
| | | 3 : 5 = 1 (2).

4) Mit 4.

| | | | 4 | 4 + 1 = 5, 1 + 4 = 5.
| | | | 1 | 1 × 4 + 1 = 5.
| | | | | 5 — 4 = 1, 5 — 1 = 4.
| | | | | 4 : 5 = 1 (1).

Es wird ein Finger nach dem andern in die Höhe gehoben: 1 + 1 = 2, 2 + 1 ꝛc., und 1 × 1 = 1, 2 × 1 = 2 ꝛc. Dann wird die Hand platt auf den Tiſch gelegt — 1, den Daumen abgeſondert: 4 + 1 = 5, und 1 + 4 = 5; 2, den Zeigefinger zum Daumen: 2 + 3 = 5, 3 + 2 = 5 ꝛc. Ebenſo mit dem Abziehen.

5 iſt 1 mehr als 4, 2 mehr als 3, 3 mehr als 2, 4 mehr als 1.
4 iſt 1 weniger als 5, 1 mehr als 3 ꝛc.
3 iſt 2 weniger als 5 ꝛc.
5 = 5 × 1 (5 iſt das 5fache von 1).
1 = ⅕ × 5 (1 iſt der 5te Teil von 5).

Die 5 beſteht aus 2 ungleichen Zahlen 3 + 2, und aus 2 gleichen und 1 ungleichen Zahl 2 × 2 + 1.

b. 5 — 2 — 2 + 2 × 2 — 3, die Hälfte, 1 ab, 5mal genommen?
2 × 2 + 1 — 3 × 1 × 2 (2mal gen.) — 3 + 4? ꝛc.

c Welche Zahl iſt der fünfte Teil von 5?
Wie viel muß ich zu 3 thun, um 5 zu erhalten?
Wie viel muß ich von 5 wegnehmen, um 3 zu bekommen?
Wie viel mal 2 habe ich zu 1 gethan, wenn ich 5 erhalte?
Ich habe von einer Zahl das Doppelte von 2 abgenommen und 1 übrig behalten. Welches war die Zahl?

II. Wie viel Dreier ſtecken in 5 Pfennig?

Wie viel Dreier- und Zweierbrödchen kannſt du für 5 Pfennig kaufen?

N. hatte von ſeinem Vater 1 3 Pfennig- und ein Zweierſtück bekommen. Damit ging er zum Kaufmann, und holte ſich 5 Bogen Löſchpapier. Wie viel koſtet ein Bogen?

An Strichen und Punkten zu veranſchaulichen.

Pfennig Bogen

. |
. |
. |
. |
. |

Bertha hatte 3 mal herum geſtrickt, ihre Schweſter 2 mal mehr. Wie vielmal dieſe?

Ein Vater verteilte unter ſeine 3 Kinder 5 Pfirſiche. Das jüngſte bekam nur eine; wie viel bekam jedes der älteren?

Wie viel Liter ſtecken in 5 Schoppen?

1 L. { . Schoppen . .

1 L. { . . .

. .

Es wird ein Fünfpfennigſtück vorgezeigt, der Lehrer legt eine Menge Einpfennigſtücke, untermiſcht mit Zweipfennigſtücken daneben und läßt um den Fünfer die entſprechende Anzahl Einer gegenüberſtellen.

Sechste Stufe.

Die Sechs.

Der Schüler iſt bereits ſo weit, auf die ihm vorgelegte Frage: Was weißt du mir von der Sechs zu ſagen? die nachfolgenden Operationen ſelbſtändig vorzunehmen, denn er kommt nach einem ſolchen Gange ſelbſt hinter die Methode deſſelben. Der Lehrer kann gewöhnlich ſicher darauf rechnen, daß ihm die nächſt zu behandelnde Zahl bereits ganz fertig nach dem bekannten Schema ausgeführt zur betreffenden Stunde vorgezeigt wird.

I. a.

| | | | | | | 6

| 1
| 1 | 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6.
| 1 | 6 × 1 = 6.
| 1 | 6 — 1 — 1 — 1 — 1 — 1 = 1.
| 1 | 1 : 6 = 6.
| 1

| | 2 | 2 + 2 + 2 = 6. (2 + 2 = 4, 4 + 2 = 6.)
| | 2 | 3 × 2 = 6.
| | 2 | 6 — 2 — 2 = 2.
| | 2 | 2 : 6 = 3.

			3	3 + 3 = 6. 2 × 3 = 6. 6 — 3 = 3. 3 : 6 = 2.
			3	

				4	4 + 2 = 6, 2 + 4 = 6. 1 × 4 + 2 = 6. 6 — 4 = 2. 4 : 6 = 1 (2).
				2	

					5	5 + 1 = 6, 1 + 5 = 6. 1 × 5 + 1 = 6. 6 — 5 = 1. 5 : 6 = 1 (1).
				1	

Tiere mit 6 Beinen verglichen mit 4- und 2beinigen Tieren.

6 = 5 + 1 (iſt 1 mehr als 5), 4 + 2, 3 + 3, 2 + 4, 1 + 5.
5 = 6 — 1 (iſt 1 weniger als 6), 4 + 1, 3 + 2, 2 + 3, 1 + 4.
4 = 6 — 2, 5 — 1, 3 + 1, 2 + 2, 1 + 3.
3 = 6 — 3, 5 — 2, 4 — 1, 2 + 1, 1 + 2.
2 = 6 — 4, 5 — 3, 4 — 2, 3 — 2, 1 + 1.
1 = 6 — 5, 5 — 4, 4 — 3, 3 — 2, 2 — 1.
6 = 6 × 1 (iſt das 6fache von 1), 3 × 2, 2 × 3.
3 = ½ × 6 (iſt die Hälfte von 6),
2 = ⅓ × 6.
1 = ⅙ × 6.

Aus welchen 3 gleichen und aus welchen 3 ungleichen Zahlen iſt 6 zuſammengeſetzt?

b. 1 × 2 + 1 × 2 + 1 × 2 — 1 × 2 × 3 — 5 × 5?

Von 6 Pf. gebe ich aus 1 Pf. und 2 Pf. und 3 Pf. Wie viel Pfennig bleiben mir?

Wer von euch hat ſchon ein Markſtück geſehen?

Der Lehrer nimmt einige Mark aus ſeiner Taſche und zeigt ſie vor.

Ich habe 1 Mark und 3 Mark und 2 Mark, und gebe davon aus 2 Mark und 1 Mark.

4 + 2 — 3 iſt wie viel weniger als 6?

c. Welche Zahl iſt das Dreifache von 2?

Welche Zahl iſt das Zweifache von 3?

Welche Zahl kannſt du 3mal von 6 und 2mal von 4 fortzunehmen?

Wie viel mal Eins hat die Hälfte von 6 mehr als die Hälfte von 4, und wie viel weniger als 5?

Ich habe eine Zahl 2mal von 6 weggenommen und noch 2 übrig behalten. Welche Zahl iſt das?

Wie oft ſteckt der 3te Teil von 6 in der 4?

Die Hälfte von 4 iſt gleich welchem Teile von 6?

II. Sechs Pfennig nannte man früher einen Sechſer. Wie viel Einer, Zweier, Dreier hatte ein Sechſer?

Wie viel Fünfer ſtecken in 6 Pfennig?
Wie viel Liter ſind 6 Schoppen?
Wie viel Mark koſten 3 Liter Honig, wenn 1 Schoppen 1 Mark koſtet?
Wenn aber 1 Schoppen 2 Mark koſten würde, wie viel bekäme ich da für 6 Mark?
Wenn man für 3 Spulen 6 Pfennig bezahlt, wie viel koſtet eine?
Wie viel Dreierbrödchen bekommſt du für 6 Pfennig?
Was koſten 3 Bogen Schreibpapier, wenn 1 Bogen 2 Pfennig gilt?
Wie viel Bogen kann man für 6 Pfennig kaufen, wenn der Bogen 2 Pf. — 1 Pf. gilt?
So oft ich dem Kaufmann 2 Pf. hinlege, bekomme ich 1 Bogen Papier ꝛc.
Ich habe in 3 Taſchen 6 Äpfel. Wie viel in jeder Taſche?

Siebente Stufe.

Die Sieben.

I. a.

| | | | | | | | 7

|	1
|	1
|	1
|	1
|	1
|	1
|	1

$1+1+1+1+1+1+1=7.$
$7\times 1=7.$
$7-1-1-1-1-1-1=1.$
$1:7=7.$

| |	2
| |	2
| |	2
|	1

$2+2+2+1=7.$
$3\times 2+1=7.$
$7-2-2-2=1.$
$2:7=3\ (1).$

| | |	3
| | |	3
|	1

$3+3+1=7.$
$2\times 3+1=7.$
$7-3-3=1.$
$3:7=2\ (1).$

| | | |	4
| | |	3

$4+3=7,\ 3+4=7.$
$1\times 4+3=7.$
$7-4=3,\ 7-3=4.$
$4:7=1\ (3).$

| | | | |	5
| |	2

$5+2=7,\ 2+5=7.$
$1\times 5+2=7.$
$7-5=2.$
$5:7=1\ (2).$

| | | | | |	6
|	1

$6+1=7,\ 1+6=7.$
$1\times 6+1=7.$
$7-6=1.$
$6:7=1\ (1).$

Macht 7 Punkte und zählt laut! Eins! — wie viel Zweier fehlen noch? Zwei! — Wie viel Einſen fehlen noch? ꝛc.

Wie verteilte ein Vater 7 Äpfel unter 2, 3, 4 Kinder?

$7 = 6 + 1,\ 5 + 2,\ 4 + 3$ ꝛc.
$6 = 7 - 1,\ 5 + 1$ ꝛc.
$7 = 7 - 2$ ꝛc.
$5 = 7 \times 1,\ 1 = \frac{1}{7} \times 7.$

Aus welchen gleichen Zahlen iſt 7 entſtanden?

b. Karl hatte zum Jahrmarkte bekommen 1 Fünfer und 1 Pfennig und noch 1 Pfennig, und gibt davon aus 2 Pfennig und noch 1 Pfennig und noch 1 Pfennig — und behält?

Auf ſolche in nicht zu ſchnellem, aber ununterbrochenem Tempo geſprochene Exempel muß die Antwort immer augenblicklich erfolgen.

$3 \times 2 + 1 - 2 \times 3 + 4 - 3 \times 3 + 1?$
$2 + 1 + 2 + 1 + 1?\ 1 + 2 + 1 + 2 + 1?$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1?$

c. Von welcher Zahl kannſt du 1 7 mal wegnehmen?

Welche Zahl ſteckt 7 mal in 7?

Zu welcher Zahl muß ich das Dreifache von 2 legen, um 7 zu bekommen?

Ich nehme eine Zahl 2 mal, und bekomme 1 weniger als 7. Welche Zahl habe ich verdoppelt?

Wenn ich eine Zahl 2 mal nehme und 1 weniger bekomme als 7, ſo iſt das 6. Die Zahl aber, welche ich 2 mal genommen habe, iſt 3, denn $6 = 2 \times 3$. Alſo muß ich 3 verdoppeln, um 1 weniger zu bekommen als 7.

Um wie viel mal Eins iſt 7 größer als das Doppelte von 2?

Das Doppelte von 2 iſt 4. 7 iſt 3 mehr als 4, hat alſo 3×1 mehr als 4. Alſo 7 um 3×1 größer als das Doppelte von 2.

II. Eine Woche hat 7 Tage.

Der erſte, zweite ꝛc. ſiebente Tag heißt? Zwiſchen dem dritten und fünften Tag liegt? ꝛc.

Ich machte neulich eine Reiſe, die dauerte gerade eine Woche. Wie viel Tage war ich unterwegs?

Wie viel Geld brauchte ich aber zu der Reiſe, wenn ich jeden Tag 1 Thaler verzehrte?

Wenn du alle Tage einen Pfennig in deine Sparbüchſe thuſt, wie viel macht das auf eine Woche?

Wie viel Zweier haſt du dann ſchon geſammelt?

Wie viel Liter ſtecken in 7 Schoppen?

1 Liter	3 Schoppen
| | | |	| | |

Wie viel Schoppen fehlen noch am 2ten Liter?

Der kleine Georg ſollte vom Bäcker 2 Dreierbrödchen holen, und bekam von der Mutter 1 Fünfpfennigſtück und 1 Zweier. War das genug? Wie viel brachte er wieder?

Ein ander Mal bekam er ein Fünfgroſchenſtück und ein Zweigroſchenſtück und ſollte dafür Bier holen. Wie viel Schoppen (Liter und Schoppen) erhält er, wenn ein 1 Schoppen 1 Gr. koſtete?

Achte Stufe.

Die Acht.

I. a.

| | | | | | | | | 8

|							1
|							1
|							1
|							1
|							1
|							1
|							1
|							1

$1+1+1+1+1+1+1+1=8.$
$8\times 1=8.$
$8-1-1-1-1-1-1-1=1.$
$1:8=8.$

|	|						2
|	|						2
|	|						2
|	|						2

$2+2+2+2=8.$
$4\times 2=8.$
$8-2-2-2=2.$
$2:8=4.$

|	|	|					3
|	|	|					3
	|	|					2

$3+3+2=8.$
$2\times 3+2=8.$
$8-3-3=2.$
$3:8=2\ (2).$

|	|	|	|				4
|	|	|	|				4

$4+4=8.$
$2\times 4=8.$
$8-4=4.$
$4:8=3.$

|	|	|	|	|			5
		|	|	|			3

$5+3=8,\ 3+5=8.$
$1\times 5+3=8.$
$8-5=3.$
$5:8=1\ (3).$

|	|	|	|	|	|		6
		|	|				2

$6+2=8,\ 2+6=8.$
$1\times 6+2=8.$
$8-6=2.$
$6:8=1\ (2).$

|	|	|	|	|	|	|	7
			|				1

$7+1=8,\ 1+7=8.$
$1\times 7+1=8.$
$8-7=1.$
$7:8=1\ (1).$

Ich habe in 2 Taſchen 8 Mark. Wie viel in jeder?

Der Lehrer kann zur Freude ſeiner Schüler ſo lange falſch ſagen, bis die Fälle erſchöpft ſind.

$8 = 7 + 1,\ 6 + 2,\ 5 + 3$ ꝛc.
$7 = 8 - 1$ ꝛc.
$8 = 2 \times 4,\ 4 \times 2,\ 8 \times 1.$
$1 = \frac{1}{8} \times 8,\ 2 = \frac{1}{4} \times 8,\ 4 \times \frac{1}{2} = 8.$

Die 8 beſteht aus 4 gleichen Zahlen, denn ſie hat 4×2, und aus 2 gleichen Zahlen, denn ſie iſt 2×4, ferner aus 2 gleichen und 1 ungleichen Zahl, nämlich $2 \times 3 + 2$.

b. $8 - 1 - 2 - 1 - 2 - 1$?
$1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1$?
$2 + 1 + 2 + 1 + 1$?
$2 \times 2 + 3 + 1 = 5 \times 2 + 2$? ꝛc.

c. Welche Zahl hat den 4ten Teil von 8 dreimal?

Welches iſt der Unterſchied zwiſchen der Hälfte von 8 und der Hälfte von 6?

Welche Zahl muß ich verdoppeln, und welche vervielfältigen, um 8 zu bekommen?

Welche Zahl hat 5×1 mehr als 3?

Die Zahl, welche 5×1 oder 5 mehr hat als 3, iſt $3 + 5 = 8$.

II. Wie viel Zweier, Dreier, Vierer, Fünfer ſtecken in 8 Pfennigen?

Wie viel Liter in 8 Schoppen?

Wie viel Wochen in 8 Tagen?

Wilhelm wollte ſich 4 Spulen kaufen, das Stück zu 2 Pfennig. Wie viel Geld mußte er haben? Er bezahlte die Summe in 3 Geldſtücken, welche waren das?

Wenn 2 Liter 8 Mark koſten, wie viel 1 Schoppen?

2 Liter ſind 4 Schoppen. Koſten 4 Schoppen 8 Mark, ſo koſtet 1 Schoppen 2 Mark *).

Wer vier Zweimarkſtücke **) hat, kann da wie viel Schoppen kaufen?

Wie viel Schoppen aber würde er bekommen, wenn 1 Schoppen 1 Mark koſtet?

· Mark	Schoppen
· "	"
u. ſ. w.	
· · Mark	Schoppen
· · "	"
· · "	"
· · "	"

*) Weil der Schüler hier noch in ganz unmittelbarer Anſchauung rechnet, ſo kann ihm die ausführliche Form: „ſo koſtet 1 Schoppen den 8ten Teil von 8 Mark = 1 Mark" erlaſſen werden.

**) Vorgezeigt und jedem Zweimarkſtück werden 2 Markſtücke gegenüber gelegt bis 4×2.

Neunte Stufe.

Die Neun.

I. a.

| | | | | | | | | 9

| 1
| 1
| 1
| 1
| 1
| 1
| 1
| 1
| 1

$1+1+1+1+1+1+1+1+1=9.$
$9\times1=9.$
$9-1-1-1-1-1-1-1-1=1.$
$1:9=9.$

| | 2
| | 2
| | 2
| | 2
| 1

$2+2+2+2+1=9.$
$4\times2+1=9.$
$9-2-2-2-2=1.$
$2:9=4\ (1).$

| | | 3
| | | 3
| | | 3

$3+3+3=9.$
$3\times3=9.$
$9-3-3=3.$
$3:9=3$ ꝛc.

$9=8+1,\ 7+2,\ 6+3$ ꝛc.
$8=9-1,\ 7+1$ ꝛc.
$7=9-2,\ 8-1,\ 6+1$ ꝛc.
$9=9\times1,\ 3\times3.$
$1=\frac{1}{9}\times1,\ 3=\frac{1}{3}\times9.$

Die 9 läßt ſich zerlegen in
3 gleiche Zahlen . . . . . $3+3+3.$
4 gleiche Zahlen u. 1 ungl. Zahl $2+2+2+2+1.$
2 gleiche Zahlen u. 1 ungl. Zahl $4+4+1.$
3 ungleiche Zahlen . . . . $2+3+4.$
2 ungleiche Zahlen . . . . $5+4.$

b. Wie viel Pfennig ſind 1 Fünfer, 1 Zweier und 1 Pfennig und noch 1 Pfennig?

Von einem Baume fiel herab 1 Apfel, und noch 1, und noch 1, und noch ein und 2×2 Äpfel. Wie viel?

Ich gebe von 9 Mark aus 2 Mark, und 1 Mark, und 3 und 2 und noch 1 Mark. Wie viel behalte ich?

$3\times3-3\times2+2\times3-2\times4-7?$
$1+2+3+3-2-3-4?$

c. Wie viel mal 1 iſt das Dreifache von 3 größer als das Vierfache von 2?

Welche Zahl kann ich von 9 4mal wegnehmen, daß ich 1 übrig behalte?

Welcher Teil von der 6 iſt der dritte Teil von 9?

Setze 9 aus 2 ungleichen Zahlen zuſammen, von denen die eine 1 mehr hat, als die andere?

II. Wieviel Liter ſtecken in 9 Schoppen, wie viel Wochen in 9 Tagen, wie viel Zweier, Dreier, Vierer, Sechſer in 9 Pfennigen?

Die kleine Marie hatte zum Oſterfeſte ein Lied von 9 Verſen aufbekommen. Sie lernte an jedem Tage vorher 3 Verſe. Wie viel Tage lernte ſie daran?

Ihr Bruder hatte in 3 Tagen 9 Seiten geſchrieben; jeden Tag gleich viel. Wie viel an jedem Tage?

Wie viel Dreierbrödchen bekommſt du für 9 Pfennig?

Was koſten 3 Bogen Papier, wenn 1 Bogen 3 Pfennig koſtet?

Wilhelm ſollte ſeinem Vater 4 Bogen Papier holen, den Bogen zu 2 Pfennig. Er bekam 1 Sechſer und 1 Dreier mit; wie viel Geld mußte er zurückbringen?

Zehnte Stufe.

Die Zehn.

I. a.

|||||||||| **10**

Nun haben wir die erſte Zahl gewonnen, die man wiederum als Einheit betrachtet (als eins ſetzt); darum ſchreibt man auch wieder die Ziffer 1; aber zum Zeichen, daß in dieſer Eins zehn mal ſo viel ſteckt, als in der erſten Eins, rückt man ſie eine Stelle weiter nach links und will damit ſagen: Dieſe Einheit bedeutet einen Zehner. Die leere Stelle der einfachen Einer wird mit Null bezeichnet.

Zeige mir 10 Finger! Nun 1 Finger! Bezeichnet dieſen mit der Ziffer! Bezeichnet nun die Finger beider Hände mit einer Ziffer!

Hier habe ich 1 Stäbchen; nun wollen wir 10 ſolcher Stäbchen zuſammenbinden. Mit welcher Ziffer ſchreibt ihr dies Bündel?

Wie auf den vorigen Stufen!

Die 10 beſteht aus 2 gleichen Zahlen $5+5$, aus 5 gleichen Zahlen $2+2+2+2+2$, 2 gleichen und 1 ungleichen $3\times3+1$, aus 4 ungleichen Zahlen $1+2+3+4$.

Überſicht des Teilverhältniſſes.

1 iſt die Hälfte von 2,
das Drittel von 3,
das Viertel von 4 ꝛc.
2 iſt die Hälfte von 4,
das Drittel von 6 ꝛc.
10 iſt das 10fache von 1,
5fache von 2,
2fache von 5,
3 iſt die Hälfte von 6,
das Drittel von 9.
9 iſt das 9fache von 1,
3fache von 3.
8 iſt das 8fache von 1,
4fache von 2,
2fache von 4.
7 iſt das 7fache von 1.
5 iſt das 5fache von 1.
4 iſt das 4fache von 1,
2fache von 2.

4 ist die Hälfte von 8. 3 ist das 3fache von 1.
5 ist die Hälfte von 10. 2 ist das 2fache von 1.
6 ist das 6fache von 1, 1 ist das 1fache von 1.
3fache von 2,
2fache von 3.

Welche Zahlen gehen ohne Rest auf in 10, 9, 8, 6, 4?
Welche Zahlen sind nur ein Vielfaches der Eins?
(Die Primzahlen 1, 3, 5, 7).

b. Zwei Zweier und 1 Fünfer und noch ein Pfennig, weniger 6 Pfennig, davon die Hälfte 3 mal genommen und das Doppelte von 2 Pfennig hinzugefügt — sind wiewiel Pfennig?

1 Liter und 2 Liter, dazu 3 Schoppen und noch 1 Schoppen, weniger 2 Schoppen sind wie viel Liter?

$2 \times 2 + 2 \times 3 - 3 \times 3 + 2 \times 4 + 1$?

$10 - 2 - 1 - 2 - 1 - 2 - 1$?

$1 + 2 + 3 + 4$? ꝛc.

c. Welche Zahl hat 1 mehr als das Doppelte von 3?

Um wie viel ist das Zweifache von 5 größer als das Dreifache von 3 und als das Doppelte von 4?

Ein Vater verteilte unter seine 4 Kinder 10 Äpfel, so daß jedes ältere 1 mehr bekam als das jüngere. Wie viel bekam jedes?

Die Zehn besteht aus den 4 ungleichen Zahlen $1 + 2 + 3 + 4$, von denen jede folgende um 1 größer ist. Darum konnte der Vater die 10 Äpfel unter seine 4 Kinder so verteilen, daß das jüngste 1 Apfel, das folgende 2 ꝛc. bekam.

N. hatte 4 Sprüche gelernt. Sein Bruder sagte: Ich kann noch einmal so viel als du und noch 2 mehr. Wie viel konnte dieser?

Hatte N. 4 Sprüche gelernt, und konnte sein Bruder noch einmal so viel und noch 2 mehr, so konnte dieser $2 \times 4 + 2$ Sprüche $= 10$ Sprüche.

Hermann sagte: Ich bin 5 mal so alt wie mein kleiner Bruder. Dieser war aber 2 Jahr. Wie alt war Hermann?

War der kleine Bruder 2 Jahr und Hermann 5 mal so alt, so war H. $5 \times 2 = 10$ Jahre alt.

II. 10 Schoppen? Liter.
10 Tage? Wochen und Tage.
10 Pfennig? Zweier, Fünfer.

Fritz hatte 1 Fünfer, 1 Zweier und 1 Pfennig. Mit diesem Gelde ging er zum Buchbinder und kaufte sich 4 Bogen weißes Papier, den Bogen zu 2 Pf., und 2 Bogen blaues Papier, den Bogen zu 1 Pf. Reichte sein Geld?

Karl hatte eben so viel Geld und kaufte dafür 3 Briefbogen, den Bogen zu 3 Pfennig. Wie viel behielt er von seinem Gelde übrig?

Wie viel Liter kann man für 10 Mark kaufen, wenn 1 Liter 2 Mark gilt? und wie viel, wenn der Schoppen 5 Mark kosten würde?

Wie viel Semmelchen (à 2 Pfennig) bekommst du für 10 Pfennig?

Für 2 Pfennig bekomme ich 1 Semmelchen, also bekomme ich für 10 Pf. 5 Semmelchen., denn 10 Pf. $= 5 \times 2$ Pf. Oder: Wenn ich dem Bäcker 2 Pf. hinlege, giebt er mir 1 Semmelchen. Habe ich 10 Pf., so kann ich 5×2 Pf. hinlegen, also giebt er mir auch 5×1 Semmelchen.

Der Lehrer legt 1 Neulot auf den Tiſch und daneben 10 Gramm. Eine Wage iſt gleichfalls zur Hand. In der einen Wagſchale wird das Zehngrammgewicht geworfen; die andere Schale ſchnellt in die Höhe. Nun wirft ein Schüler in dieſe Schale erſt 1 Gramm, dann noch 1, dann wieder eins u. ſ. f. Die Schale mit den einzelnen Gramm ſinkt immer tiefer und endlich, nachdem 10 Stück hineingelegt ſind, ſteht der Wagbalken wagrecht.

Ein Neulot oder Dekagramm hat 10 Gramm. Welcher Teil von einem Neulot iſt ein Gramm?

Wie viel mal 1 Gramm muß ich nehmen, um ein Neulot (Dekagr.) zu bekommen?

Das Wievielfache von 1 Gramm iſt das Neulot oder Dekagramm?

Hat ein Neulot 10 Gramm, ſo hat ein halbes Lot wie viel Gramm?

Man nennt das Gewicht von 2 Zollpfund 1 Kilogramm. Wie viel Kilo ſtecken in 10 Zollpfund?

Nenne die Kilogramm von 1 bis 5 in Pfunden:

1	Kilo	hat	2	Pfund
2	"	haben	4	"
3	"	"	6	"
4	"	"	8	"
5	"	"	10	"

Wie viel Kilogramm kauft man für 10 Mark wenn das Pfund 1 Mark koſtet?

(Antw. Koſtet das Pfund 1 Mark, ſo koſtet das Kilogramm 2 Mark. Da 10 Mark = 5 × 2 Mark, ſo kann man für 10 Mark 5mal 1 Kilogramm kaufen.)

Unter beſonders günſtigen Schulverhältniſſen kann ſchon jetzt des Meters Erwähnung gethan werden. Doch im Allgemeinen bleibt es ratſam, das Schwierige nicht zu häufen und das Neue nur nach und nach einzuführen.

Hier zeige ich euch ein Maß, das nennt man 1 Meter. Zehn ſolcher Meter bilden 1 Dekameter oder eine Kette. Welcher Teil vom Dekameter ſind 5 Meter, 2 Meter, 1 Meter?

Wenn ein Baumwollenzeug von der Länge Eines Meters 1 Mark koſtet, wie viel muß man für 1 Dekameter deſſelben Stoffes bezahlen?

Wenn aber 2 Meter nur 1 Mark koſten, ſo hätte man nur welchen Teil obiger Summe zu zahlen?

Wie viel Meter kann man für 10 Mark kaufen, wenn 1 Meter 2 Mark, und wie viel, wenn das Meter 5 Mark koſtet?

Man hat das Meter in 10 gleiche Teile geteilt und Einen ſolchen Teil ein **Dezimeter** genannt.

Zeichnet 1 Dezimeter; welchen Teil des Ganzen ſtellt das Dezimeter dar?

Wie viel Meter ſind 5 Dezimeter?

Wie viel Meter ſind 2 Dezimeter?

Wenn das Meter 10 Mark koſtet, ſo koſten 1, 2, 5, 7, 9 Dezimeter wie viel?

Hiermit wäre denn der erste und wichtigste Schritt des ganzen Rechenunterrichts geschehen; in der Weise, wie wir ihn gethan wissen wollen, wird der Zeitraum von 1 Jahr nicht zu lang sein; vielleicht noch in's 2te Jahr hinein verlängert werden müsse. Extensiv hat der Schüler freilich nicht viel gewonnen — er kennt nur die Zahlen von 1 bis 10. Aber er *kennt* sie auch, und hat in ihrem Bereich schon eine solche Fülle von Rechenoperationen sich zu eigen gemacht, daß schon die halbe Arbeit für die folgende Stufe gethan ist. Wozu hülfe es auch, wenn er jetzt schon bis 100 und noch weiter zählen könnte, und dabei die Zahl 9 nicht in ihre Elemente zu zerlegen wüßte? Für diese Durcharbeitung der reinen Zahl machen wir nochmals an die sub. I. c. aufgestellten Übungen aufmerksam, die in anderen Rechenbüchern wohl unter dem Namen „verschiedene Ausdrucksweise" als ein zufälliges hie und da „nebenbei" vorkommen. Sie sind *wesentlich* für den Gewinn einer klaren Vorstellung der Zahl, und dürfen weder in einer Dorf- noch Stadt-Elementarschule beeinträchtigt werden. Auch haben sie, wofern nur eine *aufmerksame* Anschauung vorangegangen ist, durchaus keine Schwierigkeit. Ebenso werden auch die angewandten Aufgaben ohne Mühe von den Schülern gelöst werden, da auf jeder Stufe dasselbe einfache Lebensverhältnis wiederkehrt.

Daß nicht weitergegangen wird, ehe nicht eine Stufe *vollkommen* erstiegen ist, daß namentlich öfter repetiert werden muß, und die in Ziffern niedergeschriebenen Sätze *fest* dem Gedächtnis einzuprägen sind — mag gleichfalls hier nochmals erinnert werden.

Zweites Jahr*)

Allseitige Anschauung der Zahlen von 10 bis 100.

Vorbemerkungen.

1) Anschauungsmittel bleiben auch hier Finger und Striche. Von jenen kann man ganz eigentlich sagen, daß die Natur dem Menschen das dekadische Zahlensystem an die Hand gegeben habe.

2) Das Verfahren mit den einzelnen Stufen ist ganz das auf den früheren Stufen. Schriftlich bedarf es jetzt übrigens bloß der abgekürzten Addition und Subtraktion, nämlich der Multiplikations- und Divisionsform, obwohl mündlich in der bekannten Weise jede einzelne Zahl in ihre Elemente zerlegt wird (durch das Messen mit den Grundzahlen von 1 bis 10), was mit jeder Stufe rascher von Statten geht, und zu der größten *mechanischen Fertigkeit* gebracht werden muß. Dieser Mechanismus ist überdies mit der größten Selbstthätigkeit von Seiten des Schülers verbunden.

3) Für die Operation mit der reinen wie mit der angewandten Zahl kann nunmehr schon eine größere Mannigfaltigkeit in der Ausdrucksweise

*) Beziehungsweis 2tes und 3tes Jahr.

Statt finden, damit der Schüler von dem Schema immer freier werde. Für die angewandten Aufgaben indeſſen bewegen wir uns immer in möglichſt nahe liegenden Kreiſen, um dem Schüler um ſo mehr Gelegenheit zu geben, ſich ſelbſt Aufgaben zu bilden, was zweckmäßig als Belohnung für den geſtattet wird, der ein Exempel zuerſt löſt. Dieſes Selbſterfinden von Exempeln kann aber um ſo weniger Schwierigkeit haben, da immer von der vorangegangen Stufe ausgegangen und nur das ſchon Bekannte weiter ausgebildet wird.

Elfte Stufte.

Die Elf.

I. „10 mal Eins" oder „10 Einer" zuſammen genommen machen „1 Zehner".

„Habe ich 10 Einer zuſammengenommen, ſo habe ich 1 Zehner und keinen (0) Einer mehr."

| | | | | | | | | | = 1 Zehner 0 Einer = 10.

„Kommt noch 1 Einer hinzu, ſo gehört der in den zweiten Zehner."

| | | | | | | | | | 10 + 1 = 11.
|

Was bedeutet die 1 rechter Hand, was die 1 linker Hand? Wozu gehört der Einer? Wie viel Einer müßten noch hinzukommen, um den zweiten Zehner voll zu machen? — Wie nennt man 1 Zehner und 1 Einer mit Einem Worte? Was heißt 11?

a. (Mündlich.)

Meſſen mit 1.

1 + 1 + 1 ꝛc. = 11 (1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3 ꝛc.)
11 × 1 = 11.
11 — 1 — 1 — 1 ꝛc. (11 — 1 = 10, 10 — 1 = 9 ꝛc.).
1 : 11 = 11.

Meſſen mit 2.

2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 11.
5 × 2 + 1 = 11.
11 — 2 — 2 — 2 — 2 — 2 = 1.
2 : 11 = 5 (1).

u. ſ. f. bis

Meſſen mit 10.

10 + 1 = 11.
1 × 10 + 1 = 11 (1 Zehner und 1 Einer iſt 11).
11 — 10 = 1.
10 : 11 = 1 (1) (in 11 ſteckt 1 Zehner + 1 Einer).

Jeder Schüler bekommt hierbei einen Satz und weil er den Gang kennt, muß alles Nachhelfen und Anfangen von Seiten des Lehrers wegfallen.

Schriftlich:

| | | | | | | | | | 10 + 1 = 11.
|

$11 = 11 \times 1.$	$1 : 11 = 11.$
$5 \times 2 + 1.$	$2 : 11 = 5\ (1).$
$3 \times 3 + 2.$	$3 : 11 = 3\ (2).$
$2 \times 4 + 3.$	$4 : 11 = 2\ (3).$
$2 \times 5 + 1.$	$5 : 11 = 2\ (1).$
$1 \times 6 + 5.$	$6 : 11 = 1\ (5).$
$1 \times 7 + 4.$	$7 : 11 = 1\ (4).$
$1 \times 8 + 3.$	$8 : 11 = 1\ (3).$
$1 \times 9 + 2.$	$9 : 11 = 1\ (2).$
$1 \times 10 + 1.$	$10 : 11 = 1\ (1).$

Vergleichung (mündlich):

$11 = 10 + 1,\ 9 + 2,\ 8 + 3$ ꝛc.

$11 = 11 \times 1,\ 1 = \frac{1}{11} \times 11$ (11 ist das Elffache von 1, 1 ist der elfte Teil von 11).

Setze 11 aus 3 gleichen und 1 ungl. Zahl zusammen!
4 gleichen und 4 ungl. Zahlen zusammen!
5 gleichen und 1 ungl. Zahl zusammen!
4 ungleichen Zahlen! ꝛc.

b. Ich habe 1 Sechser, 1 Dreier, 1 Pfennig und noch 1 Pf., und gebe davon 4 Pf., und 1 Pf. und 3 Pf.; bleibt?

$11 - 2 - 2 - 2 - 3$?

$11 - 1 - 2 - 1 - 2 - 1 - 2 =$?

$2 \times 5 + 1 - 2 \times 4 + 3$? ꝛc.

c. Wie viel Einer muß ich zu dem Fünffachen von 2 setzen, um 11 zu bekommen?

Von welcher Zahl muß ich das Dreifache von 3 abziehen, um 2 zu erhalten?

Die Zahl, von der ich 3×3 abziehen muß, um 2 zu erhalten, ist $3 \times 3 + 2 = 11$.

Wie oft kann ich den 4ten Teil von 8 von 11 wegnehmen?

Der 4te Teil von 8 ist 2; da $11 = 5 \times 2 + 1$, so kann ich 2 oder den 4ten Teil von 8 5 mal von 11 wegnehmen.

Welche Zahl ist um 1 Zehner größer als 1?

Wie viel beträgt der Unterschied zwischen dem 4fachen von 2 und 11?

Das 4fache von 2 ist 8, der Unterschied von 8 und 11 ist $11 - 8 = 3$ also beträgt der Unterschied zwischen dem 4fachen von 2 und 11 drei.

II. 11 Pfennig = 3 Dreier und 1 Zweier.

Wie viel Pfennig fehlen noch am 3ten Dreier?

oder: 1 Sechser, 1 Dreier und 1 Zweier; oder: 2 Vierer und 1 Dreier

11 Schoppen = 5 Liter 1 Schoppen.

Es fehlt noch 1 Liter am 3ten Schoppen.

11 Tage = 1 Woche 4 Tage.

Es fehlen noch 3 Tage an der zweiten Woche.

N. hatte zu einer Reise 11 Tage gebraucht, und gerade 11 Thaler verzehrt. Wie viel betrug das auf 1 Tag?

Wenn N. auf 11 Tage 11 Thaler brauchte, so brauchte er auf 1 Tag den 11ten Teil von 11 Thalern = 1 Thaler.

B. hatte auf Reiſe 11 Thaler, und zwar täglich 1 Thaler verzehrt. Wie lange war er unterwegs geweſen?

B. hatte ſoviel Tage gereiſt, als er Thaler ausgegeben hatte. Da er 11 Thaler verzehrt, hatte er auch 11 Tage gereiſt.

Zwölfte Stufe.

Die Zwölf.

I. a.

$10 + 2 = 12.$

Mündlich: $1 + 1 + 1$ ꝛc. $= 12.$
$12 \times 1 = 12.$
$12 - 1 - 1 - 1$ ꝛc.
$1 : 12 = 12.$
u. ſ. f.

Schriftlich:

$12 = 12 \times 1.$	$1 : 12 = 12.$
$6 \times 2.$	$2 : 12 = 6.$
$4 \times 3.$	$3 : 12 = 4.$
$3 \times 4.$	$4 : 12 = 3.$
$2 \times 5 + 2.$	$5 : 12 = 2$ (2).
$2 \times 6.$	$6 : 12 = 2.$
$1 \times 7 + 5.$	$7 : 12 = 1$ (5).
$1 \times 8 + 4.$	$8 : 12 = 1$ (4).
$1 \times 9 + 3.$	$9 : 12 = 1$ (3).
$1 \times 10 + 2.$	$10 : 12 = 1$ (2) (in 12 ſteckt 1 Z. + 2 E.).
(1 Z. + 2 E.).	

$12 = 11 + 1,\ 10 + 2,\ 9 + 3$ ꝛc. (iſt 1 mehr als 11, 2 mehr ꝛc.).

$12 = 12 \times 1$ (das 12fache von 1).
6×2 (das 6fache von 2).
4×3 (das 4fache von 3).
3×4 (das 3fache von 4).
2×4 (das 2fache von 6).

$1 : 12 = 12$ (2 iſt der 12te Teil von 12).
$2 : 12 = 6$ (1 iſt der 6te Teil von 12).
$3 : 12 = 4$ (3 iſt der 4te Teil von 12).
$4 : 12 = 3$ (4 iſt der 3te Teil von 12).
$6 : 12 = 2$ (6 iſt die Hälfte von 12).

Aus welchen gleichen Zahlen iſt 12 entſtanden?

Aus welchen ungleichen Zahlen?

Setze 12 aus 2 Zahlen zuſammen, von denen die folgende immer 2 mehr hat!

b. $2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 2$?
$2 + 3 + 3 + 2 + 2 - 4 + 4 + 4 \times 2$?

Von 12 Äpfeln wurden aufgegeſſen die Hälfte, davon die Hälfte und noch 1 Apfel ꝛc.

Von 12 Pfennigen giebt Jemand aus 1 Dreier und 2 Pfennig, und noch 1 Dreier und 2 Pfennig und noch 1 Pfennig. Wie viel bleibt?

c. Der dritte Teil von 12 iſt welcher Teil von 8? Die Hälfte von 12 das Wievielfache von 3? ꝛc.

Welches iſt der Unterſchied zwiſchen der Hälfte von 12 und zwiſchen der Hälfte von 10?

Von welcher Zahl iſt 12 das Dreifache?

Welche Zahl muß ich von 12 abziehen, um 9 zu erhalten?

Da $9 + 3 = 12$, ſo muß ich 3 von 12 ꝛc. — Auf eine algebraiſche Auflöſung iſt hier natürlich noch zu verzichten.

Welche Zahl von 12 abgezogen, läßt 4 zum Reſt? ꝛc.

II. 12 Stück nennt man 1 Dutzend,
12 Monate nennt man 1 Jahr.
(Namen einzuüben.)

Welcher Teil vom Dutzend ſind 6 Stück?

Welcher Teil vom Jahr ſind 6 Monate?

Ebenſo 3 Stück ein „Viertel"-Dutzend.

Ebenſo 3 Monate ein „Viertel"-Jahr.

Wie viel Liter ſind 12 Schoppen?

Ein Monat hat 4 Wochen. Wer monatlich 12 Mark verdient, bekommt wie viel für die Woche?

Wer in 1 Monat oder 4 Wochen 12 Mark verdient, bekommt in einer Woche den 4ten Teil von 12 Mark = 3 Mark.

Ein Vater bezahlte für ſeinen Sohn monatlich 2 Mark Schulgeld, wie viel betrug das in einem Viertel-, wie viel in einem halben Jahre?

Ein Vierteljahr iſt der 4te Teil vom Jahr oder 12 Monaten = 3 Monate. Wer in 1 Monat 2 Mark zahlt, zahlt in 3 Monaten oder 1 Vierteljahre $3 \times 2 = 6$ Mark.

Karl hatte unter 4 Arme 12 Pfennig verteilt, wie viel Pfennig bekam jeder?

Wie viel Bogen Briefpapier (à 3 Pfennig) kannſt du für 1 Zehner und 1 Zweipfennigſtück kaufen?

Ein Zehner und 1 Zweier ſind 12 Pfennig. So oft ich 3 Pf. habe, bekomme ich 1 Briefbogen. 12 Pf. ſind 4×3 Pf., alſo bekomme ich auch 4×1 Bogen oder 4 Bogen. Veranſchaulicht:

|	|	|	·	·	·	·	·	·	0
|	|	|	·	·	·	·	·	·	0
|	|	|	·	·	·	·	·	·	0
|	|	|	·	·	·	·	·	·	0.

N. ſollte ſeinem Vater 3 Lot Schnupftabak holen, und bekam 3 Geldſtücke, 2 Fünfer und 1 Zweier. Wie teuer war 1 Lot?

Wer macht Reiſe-Exempel?

Wer eins mit Dutzend und Stück?

Karoline hatte in 3 Tagen ein Dutzend Sprüche gelernt, wie viel täglich?

Wenn 1 Pfund 3 Mark koſtet, wie viel koſten 2 Kilogramm?

2 Kilogr. = 4 Pfd. Koſtet 1 Pfd. 3 M., ſo koſten 4 Pfd. 4×3 M. = 12 M.

Dreizehnte Stufe.

Die Dreizehn.

I. a. und b. bekannt.

c. Bilde aus den Vielfachen von 3 und 2 die Summe 13!

$3 \times 3 + 2 \times 2 = 9 + 4 = 13$.

Wie verhalten ſich die Unterſchiede von 13 und 9 und 12 und 8?

Der Unterſchied von 13 und $9 = 13 - 9 = 4$; der Unterſchied von 12 und $8 = 12 - 8 = 4$; alſo iſt der Unterſchied von 13 und 9 gleich dem Unterſchiede von 12 und 8.

Vermindere 13 um 6!

$13 - 6 = 7$, denn $13 - 3 = 10$, $10 - 3 = 7$.

Welche Zahl iſt gleich der Summe von $5 + 8$?

Welche Zahl muß ich dem Vierfachen von 3 hinzuſetzen, um 13 zu bekommen?

Das Vierfache von 3 iſt 12, $12 + 1 = 13$, ich muß alſo noch 1 zu dem Vierfachen von 3 thun, um 13 zu bekommen.

II. 13 Pfennig, Wochen, Tage, Schoppen, Stück — auf ihre höhere Einheiten.

Wie viel Zweier, Fünfer, Zehner ſtecken in 13 Pfennig? Wer 13 Pfennig in 3 Geldſtücken bezahlt, legt welche Münzen auf den Tiſch? Wer dieſelbe Summe in 4 Geldſtücken bezahlt, legt welche Münzen vor? Wie viel gleiche und ungleiche, wenn 13 Pfennig in 7 Stücken bezahlt werden?

Wie viel Pfund ſind ſechs und ein halbes Kilogramm?

Wie viel Gramm über 1 Neulot ſtecken in 13 Gramm?

Vierzehnte Stufe.

Die Vierzehn.

I. a. —

b. Auf eine Pappel flogen 2 Sperlinge und noch 2, und 3 und noch 3 und noch 2×2; bald flogen wieder fort 3 und 4 und 5 und 2. Wie viel blieben ſitzen?

Karoline hatte in ihrer Sparbüchſe 3 Mark und 4 und 2 und 2 und noch 3 Mark. Wie viel zuſammen?

Ihr Bruder hatte nur die Hälfte in ſeiner Sparbüchſe, bekam aber ſchnell nacheinander noch 2 und 1 und 3 Mark. Wie viel fehlen ihm noch, um ebenſo viel zu haben als ſeine Schweſter?

c. Welche Zahl muß ich verdoppeln um das Siebenfache von 2 zu erhalten?

Das Siebenfache von $2 = 7 \times 2 = 14$; da $14 = 2 \times 7$, ſo muß ich ꝛc.

Ich habe von 14 eine Zahl 3mal weggenommen und 2 zum Reſt erhalten. Welches war die Zahl?

Wenn ich 2 zum Reſt erhalte, ſo war zuſammen 12 weggenommen, 12 aber iſt $= 3 \times 4$, alſo habe ich 4 3mal von 14 weggenommen, wenn ich 2 zum Reſt bekomme.

II. 14 Tage = 2 Wochen.
14 Pfennig = 7 Zweier, 2 Fünfer und 2 Zweier.
14 Schoppen = 7 Kannen.
14 Pfund = 7 Kilo.
14 Gramm = 1 Neulot 4 Gramm.
14 Stück = 1 Dutzend und 2 Stück.
14 Monate = 1 Jahr 2 Monate.

Wer 2 Wochen verreiſen will und auf jeden Tag 1 Goldſtück rechnet, muß wie viel mitnehmen?

Was koſten 1 Dutzend 2 Stück Schieferſtifte, das Stück zum Pfennig gerechnet?

Wie viel Bogen Papier kauft man für 14 Pfennig, wenn der Bogen 2 Pfennig gilt?

Marie hatte in 1 Jahr 7 Paar Strümpfe geſtrickt, wie viel Dutzend und Stück waren das?

Kauft man für 1 Mark 40 Pf. 14 Pfund Salz, ſo koſtet 1 Pfund? 1 Kilo?

Wie viel Meter Band kauft man für 1 Mark 40 Pf., wenn 1 Meter 20 Pf. — und wie viel wenn 1 Meter 70 Pf. koſtet?

Funfzehnte Stufe.

Die Funfzehn.

I. c.

Wie viel Einer ſtehen im 2ten Zehner?

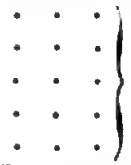
Wie viel Einer fehlen noch bis der 2te Zehner voll iſt?

Schreibt die 15 in Punkten ſo, daß immer 5 beiſammen ſtehen!

Schreibt dieſe Fünfer ſenkrecht unter einander!

3×5.

So, daß in einer Reihe nur 3 Punkte ſtehen!



Aus welchen ungleichen Zahlen beſteht 15? Aus welchen 3 gleichen und 3 ungleichen Zahlen?

Wie viel iſt der Unterſchied von 15 uud 8?

a. Ich ſehe zu, wie viel ich zu 8 legen muß, um 15 zu bekommen. $8 + 2 = 10$, $10 + 5 = 15$, $8 + 7 = 15$. Der Unterſchied von 8 und 15 iſt alſo 7.

b. Ich nehme 8 von 15 weg, $15 - 5 = 10$, $10 - 3 = 7$, $15 - 8 = 7$. Alſo ꝛc.

In welcher Zahl ſteckt 1 ganzer und 1 halber Zehner?

Welche 5 Zahlen geben die Summe 15?

Jede folgende dieſer 5 Zahlen ſei aber um 1 größer als die vorhergehende?

$1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

An einem Oſterabende verteilte eine Mutter unter ihre 5 Kinder geſottene Eier, und zwar nach dem Alter, ſo daß jedes ältere 1 Ei mehr bekam, als das jüngere. Das mittelſte im Alter bekam 3 Eier, wie viel jedes der andern? und welche Summe wurde verteilt?

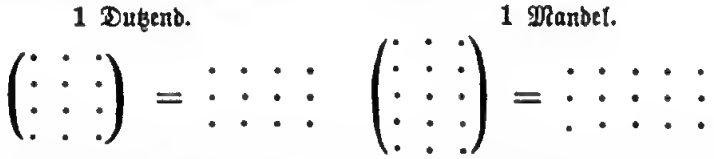
Bekam das mittelſte 3, ſo bekam das jüngere 2 E., und das jüngſte 1 Ei; das ältere aber 4 E. und das älteſte 5 Eier. Es wurden alſo $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ Eier $= 15$ Eier verteilt.

II. 15 Stück nennt man eine Mandel.

Vergleiche ein Dutzend mit einer Mandel!

1 Dutzend $= 4 \times 3$ Stück,

1 Mandel $= 5 \times 3$ Stück $= 1$ Dutzend $+ 3$ Stück.



Dutzend und Mandel beſtehen aus 3 gleichen Teilen, doch ein ſolcher Teil der Mandel hat 1 mehr, als einer von den Teilen des Dutzend.

Wenn das Dutzend 12 Pfennig koſtet, wie viel das Mandel?

15 Gramm ſind wie viel Neulot?

(Da 10 Gr. $=$ 1 Neulot, ſo ſind 15 Gr. $=$ 1 Neulot 5 Gr. Da 5 Gr. die Hälfte von 10 Gr., ſo ſind 15 Gr. $=$ 1 ganzen und 1 halben Neulot $= 1\frac{1}{2}$ Neulot.)

15 Tage ſind wie viel Wochen und Tage?

Wie viel Kilogr. ſind 15 Pfund?

Wie viel Pfund kann man für 15 Mark kaufen, wenn eins 5 Mark koſtet?

So oft ich dem Kaufmann 5 Mk. hinlege, ſo viel mal erhalte ich 1 Pfd. Nun ſind 15 Mk. $= 3 \times 5$ Mk., folglich erhalte ich dafür 3×1 Pfd.

Jemand hatte 3 Meter Tuch gekauft und 15 Thaler dafür bezahlt. Wie teuer kam ihm das Meter zu ſtehen?

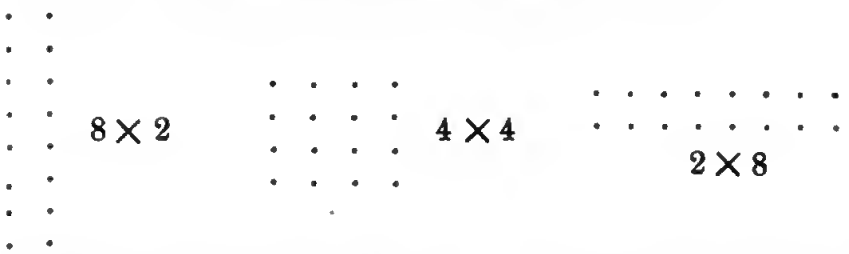
Sechzehnte Stufe.

Die Sechzehn.

I. a.

Wie viel Einer, Zweier, Dreier ſtehen im 2ten Zehner?
Teilt 2, 4, 8 Striche ab!

Schreibt je 2 Punkte ſenkrecht untereinander; je 4, je 8!



Wo ſtehen gleich viel Punkte in wagerechter und ſenkrechter Linie?
Gewandtere Schüler können hier ſchon 1 Quadrat zeichnen und in 16 Felder teilen.

b. Wie viel iſt $2+2+2+2+2+2+2+2$?
Wie viel $1+2+3+1+2+3+1+2$ weniger als 16?
Wie viel iſt $2\times2+2\times2+2\times2+2\times2$?
Wie viel iſt $16-3-3-3-3-2$?

I. c. Wie findeſt du die Hälfte von 16?

16 = 1 Zehner + 6 Einer. Die Hälfte von 1 Zehner = 5 E., die Hälfte von 6 E. = 3 E. 5 E. + 3 E. = 8, alſo die Hälfte von 16 = 8.

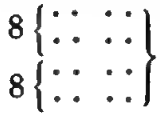
A. hatte 6 Mark. B. ſagte, wenn du den 3ten Teil deines Geldes 8mal nimmſt, ſo haſt du meine Summe. Wie viel hatte B.?

Die Summe von B. war $8\times\frac{1}{3}$ des Geldes von A.; $\frac{1}{3}\times6$ Mk. (der dritte Teil) = 2 Mk., alſo hatte B. 8×2 Mk. = 16 Mk.

A. B.

Welche Zahl iſt gleich dem Zweifachen des 4ten Teils von 16, und welcher Teil von 16 iſt das?

Der 4te Teil von 16 = 4, das Zweifache deſſelben = $2\times4=8$, alſo iſt 8 das Zweifache des 4ten Teils von 16. Da aber $16=2\times8$, ſo iſt 8 die Hälfte von 16.



II. 16 Gramm, 16 Pfund, 16 Pfennig, 16 Monate, 16 Tage, 16 Stück.

Jemand hatte für 16 Pfennig Haſelnüſſe gekauft und 2 Schock bekommen. Wie teuer war das Schock, die Mandel?

Ein Gärtner pflanzte ein Mandel und 1 Stück Tulpenzwiebeln auf 4 Beete. Wie viel auf jedes?

4 Liter ſind wie viel halbe, wie viel Viertel-Liter?

Man kann auch hier ſchon eine Literflaſche mit Waſſer füllen und mit einer Halbliter- und Viertelliterflaſche in eine zweite leere Ganzliterflaſche einfüllen laſſen.

Vier Geſchwiſter machten einen Spaziergang und ließen ſich in einem Wirtshauſe unterwegs jeder 1 Glas Milch reichen, das gerade ¼ Liter faßte. Auf die Frage wie viel koſtet 1 Glas Milch, lautete die Antwort: 4 Pfennig. Wie viel hatten die Geſchwiſter zuſammen getrunken, wie viel betrug die ganze Zeche? welches war der Milchpreis? (Nach Liter berechnet.)

Wenn der Scheffel Kartoffeln 12 Mark gilt, wie teuer iſt dann das Viertel? *)

Ein Viertel iſt der 4te Teil eines Scheffels, koſtet alſo auch nur den 4ten Teil von dem, was 1 Scheffel koſtet — ¼ × 12 Mark — 3 Mark.

Siebzehnte Stufe.

Die Sieb(en)zehn.

I. a. | | | | | | | | | | | | | | | | | = 10 + 7 = 17.

Unſere zweite Zehnerreihe wird immer voller. Wie viel Einer haben wir darin? Wie nennen wir die ganze Zahl? Wie viel Einer fehlen noch, bis der zweite Zehner voll iſt? Wie viel Einer hat die erſte Reihe mehr?

Mit wie viel Zahlen können wir die Siebzehn meſſen? Fangen wir mit 16 an!

17 = 16 + 1.
15 + 2.
14 + 3. ꝛc.

Aus wie viel Einſen, Zweien, Dreien ꝛc. beſteht 17?

17 = 17 × 1.
8 × 2 + 1.
5 × 3 + 2 ꝛc.

Setze 17 aus 2 gleichen und einer ungleichen Zahl zuſammen!

17 = 2 × 8 + 1.
2 × 7 + 3.
2 × 6 + 5.

*) Vom Neuſcheffel = 50 Kannen oder Liter iſt bei der Zahl 50 die Rede.

Setze 17 aus 3 gleichen und einer ungleichen Zahl zusammen!

$$17 = 3 \times 5 + 2.$$
$$3 \times 4 + 5.$$
$$3 \times 3 + 8 \text{ ꝛc.}$$

Setze 17 aus 4 gleichen und einer ungleichen, ferner aus 5 gleichen und einer ungleichen Zahl zusammen!

b. $17 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2$?
$17 - 3 - 3 - 3$ ꝛc.
$17 - 4 - 4 - 4$ ꝛc.
$17 - 5$ ꝛc.
$1 + 2 + 3 + 4 + 5$ — wie viel fehlt noch an 17?

2 Zweier und 1 Fünfer und noch 2 Zweier, wie viel Zweier fehlen noch an 17 Pfennig? wie viel Pfennig?

2 Kilo und 1 Pfund und noch 2 Kilo und 1 Pfund uud noch 2 Kilo und 1 Pfund und noch 2 Kilo — wie viel Pfund sind's?

c. Wie viel Einer muß ich zu dem Dreifachen von Fünf setzen, um 17 zu bekommen?

Wie viel Einer muß ich aber zu dem Fünffachen von Drei legen, um 17 zu bekommen?

(Antw. Ebensoviel.)

Wie verhält sich das Vierfache von 4 und das Dreifache von 5 zu der Zahl 17?

Das Vierfache von 4 hat 1 weniger als 17 und das Dreifache von 5 hat 2 weniger als 17.

Ich habe das Vierfache von 4 von 17 abgezogen und gerade so viel erhalten, als ob ich das Doppelte einer anderen Zahl von 17 abgezogen hätte. Welche Zahl habe ich doppelt genommen?

II. 17 Gramm = 1 Neulot 7 Gr.
17 Pfund = $8\frac{1}{2}$ Kilogramm.
17 Stück, Monate, Tage, sind wie viel Dutzend, Jahr, Wochen?

Acht und ein halbes Kilo Fleisch wurden mit 17 Mark bezahlt; wie viel kostete das Pfuud, wie viel das Kilo?

Da 1 Kilo = 2 Pfund, so sind 8 Kilo = 16 Pfund. Dazu $\frac{1}{2}$ Kilo, macht 17 Pfund. Kosten 17 Pfund 17 Mark, so kostet 1 Pfund 1 Mark, 1 Kilo 2 Mark.

Früher kaufte man das Pfund Salz um 10 Pf.; wie viel bekam man da für 1 Mark 70 Pf.?

Wie viel Kilo waren das? (Acht und halbes.)

Karl sollte 8 Pfund Salz holen, das Pfund zu 20 Pf. Er bekam von der Mutter 1 Mark, ein 50 Pf.-Stück und ein 20 Pf.-Stück. Wie viel Geld brachte er vom Kaufmann zurück?

Vier Brüder sollten sich in 1 Mark 70 Pf. der Art teilen, daß der älteste 10 Pf. mehr bekam, als die übrigen. Wie viel erhielt er und wie viel seine Brüder?

Achtzehnte Stufe.

Die Achtzehn.

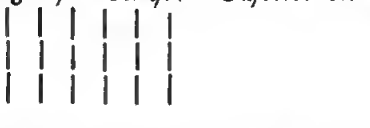
I. a. $= 10 + 8 = 18.$

Schreibt die Zahl 18 in Punkten, ſo daß immer 2 zuſammenſtehen!

Wie viel Paare (Zweier) hat der erſte Zehner? Wie viel Paare (Zweier) fehlen noch an dem zweiten?

Schreibt die Zahl 18 ſo, daß immer drei Striche zuſammenſtehen!

Wie viel Dreier, wie viel Sechſer hat die Achtzehn? Schreibt die Sechſer in wagrechter Reihe! Schreibt die Achtzehn in Fünfen!



Von welchen 2, 3, 6, 9 gleichen Zahlen beſteht die 18?

Aus welchen drei gleichen Zahlen nebſt einer ungleichen?

Aus welchen vier gleichen Zahlen nebſt einer ungleichen?

b. Wer kann ſchnell folgende Zahlenwerte ſummieren: 2 Zweier, 1 Dreier, noch 2 Zweier, 1 Fünfer und 1 Zweier?

Wie viel iſt $2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3$?

Zählt von 2 aufwärts mit Zunahme von 2 bis 18! (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18).

Ebenſo ſchnell abwärts!

Desgleichen mit 3!

c. Von welcher Zahl iſt 18 das Sechsfache?

Wie heißt die Zahl, von welcher 12 das Zweifache, 18 das Dreifache iſt?

Welcher Teil iſt dieſe Zahl von 12, von 18?

Um welchen Teil von 12 iſt 18 größer als 12?

Welche Zahl muß ich verdreifachen, um 18 zu bekommen?

Um wie viel iſt das Doppelte von 9 größer als das Doppelte von 8, von 7, von 6?

II. Die bekannten Währungszahlen: 18 Gramm, 18 Pfund, 18 Tage, Wochen und Monate. Wie viel Jahr ſind 18 Monate?

Wer 18 Pfennig hat, beſitzt wie viel Fünfer, Zweier und 1 Pfennigſtücke?

Wenn das Pfund Rindfleiſch $\frac{1}{2}$ Mark koſtet, ſo kann man für 18 Mark wie viel Pfund kaufen?

Ein Kind iſt 18 Monate alt, alſo hat es wie viel Jahre?

Antw.: $1\frac{1}{2}$ (ein und ein halbes oder anderthalb). Denn 12 Monate ſind 1 Jahr, 6 Monate ein halbes Jahr; ein und ein halbes Jahr ſind zuſammen anderthalb Jahr.

Die kleine Pauline war 18 Monat alt als ſie ſtarb, der kleine Otto 2 Jahr. Wie viel Monat iſt dieſer älter geworden? Wie viel Jahr?

UNIVERSITÄTS

Neunzehnte Stufe.

Die Neunzehn.

I. a. | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | = 10 + 9 = 19.

Ein Zehner und neun Einer heißen neunzehn. Es fehlt nur noch 1 Einer, bis der zweite Zehner voll iſt.

Schreibt die 19 ſo, daß immer 2 Striche beiſammenſtehen!

Nur die Zehn läßt ſich in Zweiern ausdrücken, die Neun aber nur in Dreiern.

. . . . . .
. . . . . .

Stellt immer fünf Striche zuſammen!

| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |

Wie viel Fünfer ſtecken in 19?

Wie viel Sechſer, Siebener, Achter, Neuner?

Schreibt dieſe wagrecht untereinander!

u. ſ. w.

b. Wie viel iſt?

1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2?

19 — 1 — 2 — 1 — 2?

Zählt ſchnell mit 3, mit 4, mit 5 von 19 abwärts!

c. Welche Zahl muß ich 5 mal nehmen und welche 3 mal, damit ich zuſammen 19 erhalte?

Das Dreifache einer Zahl und noch 1 dazu giebt 19. Welche Zahl habe ich verdreifacht?

Ich habe eine Zahl 6 mal genommen und noch 1 dazu gethan und 19 erhalten. Welche Zahl habe ich verſechsfacht?

Wie laſſen ſich 19 Äpfel unter 6 Kinder verteilen, ſo das wenigſtens fünf gleich bekommen?

II. 19 Gramm ſind 1 Neulot und 9 Gramm. Wie viel Gramm fehlen mir an 2 Neulot wenn ich 19 Gramm habe?

Guſtav hatte 2 Mark, Georg nur 1 Mark 90 Pf.; wie viel hatte dieſer weniger?

Ein Poſtpaket wog 10 Kilogramm; als man die Umhüllung (Emballage) wegnahm, wog es 1 Pfund weniger; wie viel volle Kilogramme waren nun noch da? Und wie viel Pfund im Ganzen?

Zu einem Mantel wurden 3 Meter Tuch gekauft, das Meter zu 6 Mark. Dazu ein Sammetkragen zu 1 Mark. Wie viel mußte zuſammen dafür bezahlt werden?

Mein kleiner Bruder, ſagte Anna, iſt 1½ Jahr alt; und meiner, ſagte Bertha, iſt gerade 1 Monat älter; wie viel Monate war dieſer alt; und wie viel über 1 Jahr?

Zwanzigſte Stufe.

Die Zwanzig.

I. a.

$= 10 + 10 = 20.$

Nun haben wir 2 volle Zehner oder 2 Zig. Man ſagt aber nicht zwei-zig, ſondern zwanzig.

Zeigt mir 20 Finger! Wie oft müßt ihr beide Hände erheben?

Hier ſind 20 Stäbchen. Wie viel Zehnerbündel können wir davon machen? Wir binden ſie beide zuſammen, und haben nun welche Zahl?

Schreibt 20 ſo, daß immer 2 Striche zuſammenſtehen!

Wie viel Vierer ſind das?

Der Zehner läßt ſich in 2 gleiche Teile zerlegen, alſo 20 in wie viel?

Schreibt dieſe Fünfer alle ſenkrecht unter einander!

$5 \times 4 = 20.$

Wie viel Punkte ſtehen wagrecht neben einander? Wie viel ſenkrecht untereinander? Nun wollen wir in jede Reihe 4 Punkte ſchreiben, wie viel Reihen kommen da untereinander?

$5 \times 4 = 20.$

Aus welchen gleichen Zahlen beſteht 20?

$20 \times 1,\ 10 \times 2,\ 5 \times 4,\ 4 \times 5,\ 2 \times 10.$

Von welcher Zahl iſt 20 das Zweifache oder Doppelte; von welcher das Vierfache, von welcher das Fünffache, das Zehnfache?

Welcher Teil von 20 iſt 2, 4, 5, 10?

2 iſt der zehnte Teil oder ein Zehntel von 20; 4 iſt der fünfte Teil oder $\frac{1}{5}$ von 20 ꝛc.

Zuſammenzählen und Abziehen mit 1:

1, 2, 3, 3, 4, 5, 6 (In welchem Zehner ſind wir? Wie viel Einer fehlen noch, bis der erſte Zehner voll iſt? . . 10 . (Wie viel mal haben wir jetzt die Eins geſetzt, genommen?) 11, 12, 13, 14, 15 (Wie viel mal 1 haben wir jetzt im 2ten Zehner, wie viel im Ganzen? Wie viel mal müſſen wir noch die Eins nehmen, um den 2ten Zehner voll zu bekommen?)

$$20 \times 1 = 20.$$

20, 19, 18, 17 (Halt! wie viel Einer müſſen wir noch wegnehmen, bis wir auf den erſten Zehner zurückkommen?) u. ſ. w.

$$1 : 20 = 20 \text{ mal.}$$

Ich kann die 1 von der 20 zwanzigmal wegnehmen, oder die 1 ſteckt 20mal in 20.

Nun Meſſen mit 2:

2, 4, 6, 8, 10, 12 (Wie viel mal 2 haben wir jetzt?) 14, 16 (Wie viel jetzt?) 18, 20.

$$10 \times 2 = 20.$$

20, 18, 16 u. ſ. w.

$$2 : 20 = 10 \text{ mal.}$$

Meſſen mit 3:

3, 6, 9, 12, 15, 18 — (Wie viel Einer müſſen wir noch hinzuthun, um 20 zu bekommen?) 20.

$$6 \times 3 + 2 = 20.$$

Wie oft kann ich alſo 3 von 20 wegnehmen?

So oft wir 3 wegnehmen, wollen wir einen Finger abzählen.

20, 17, 14, 11, 8, 5, — 2.

$$3 : 20 = 6 \ (2)$$

u. ſ. f.

Schriftlich:

$20 = 20 \times 1.$	$1 : 20 = 20.$
$10 \times 2.$	$2 : 20 = 10.$
$6 \times 3 \ (2).$	$3 : 20 = 6 \ (2).$
$5 \times 4.$	$4 : 20 = 5.$
$4 \times 5.$	$5 : 20 = 4.$
$3 \times 6 \ (2).$	$6 : 20 = 3 \ (2).$
$2 \times 7 \ (6).$	$7 : 20 = 2 \ (6).$
$2 \times 8 \ (4).$	$8 : 20 = 2 \ (4).$
$2 \times 9 \ (2).$	$9 : 20 = 2 \ (2).$
$2 \times 10.$	$10 : 20 = 2.$

b. Wie viel iſt: $(2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2)$?

Wie viel iſt $(3 \times 2) + (3 \times 2) + (3 \times 2)$ weniger als 20?

Zieht von 20 ab 4, 3, 2, 1 und noch einmal 4, 3, 2, 1; wie viel bleibt?

Von 20 weggenommen 13, weggenommen 6, bleibt?

Von 20 weggenommen 11? 9? 8?

Wie viel Dutzend und Stück ſind 20 Stück?

Zu 1 Mandel zähle 2 und 2 und 1 Stück, wie viel Dutzend und Stück?

c. Das Vierfache von 5 iſt gleich dem Zweifachen welcher Zahl?

Das Vierfache von 5 iſt gleich dem Fünffachen welcher Zahl?

Wie viel beträgt der Unterſchied zwiſchen dem Vierfachen von 5 und dem Vierfachen von 4?

Ein Gärtner hatte 20 Äpfel und verteilte ſie ſo, daß er jedem ſeiner drei Kinder gleich viel gab und noch 2 für Nachbars Fritz zurücklegte. Wie viel hatte jedes Kind bekommen?

Wenn der Gärtner für Nachbars Fritz 2 Äpfel zurücklegte, ſo hatte er noch 18. Dieſe in 3 gleiche Teile geteilt ꝛc.

II. 20 Stück? Mandel.

20 Meter? Dekameter.

20 Gramm ? Neulot.
20 Zollpfund ? Kilogramm.
20 Schoppen ? Kannen.
20 Neuſcheffel ? Faß.
1 Faß oder Hektoliter hat 2 Neuſcheffel.

20 Buch Papier nennt man 1 Rieß. Wie viel Rieß ſind 10 Buch?

1 Ballen Papier hat 10 Rieß; wie viel Ballen ſind 20 Rieß? Wie viel Ballen aber 5 Rieß?

Antw.: Ein halber Ballen.

Was koſtet 1 Faß (Hektoliter) Getreide, wenn der Neuſcheffel 10 Mark koſtet?

Wie viel Kilo Brod kann man für 20 Pfennig kaufen, wenn das Pfund 10 Pfennig koſtet? Wie viel würde man erhalten, wenn das Pfund nur 5 Pfennig koſtet?

Wie viel Neulot erhält man für 1 Gulden, wenn das Gramm 2 Sgr. koſtet?

1 Gulden hat 20 Sgr. Da 2 Sgr. in 20 Sgr. 10mal enthalten ſind, ſo kann ich für 20 Sgr. auch 10mal 1 Gramm, alſo 10 Gramm oder 1 Neulot bekommen.

Wie viel Dekameter Tuch bekommt man für 20 Thaler, wenn das Meter 2 Thlr. koſtet?

Da 2 Thlr. in 20 Thlr 10mal enthalten ſind, ſo bekomme ich für 20 Thlr. auch 10×1 Meter oder 1 Dekameter

Ein Dekameter, d. h. zehn Meter, können wir mit dem deutſchen Worte Kette bezeichnen. Meter mit dem deutſchen Worte Stab.

Ich habe vom Seiler 1 Kette ſtarken Bindfaden mitgenommen und dafür 20 Pfennig bezahlt; wie viel koſtet 1 Meter oder Stab?*)

1 Kette = 10 Meter. (20 Pfennig). Koſten 10 Meter 20 Pf., ſo koſtet 1 Meter den zehnten Teil von 20 Pf. = 2 Pfennig.

Vom ſchwächeren Bindfaden ließ ich noch 2 Ketten oder Dekameter holen und bezahlte dafür ebenfalls 20 Pfennig. Wie viel koſtet von dieſer Sorte der Stab?

2 Ketten = 20 Meter. 20 Pfennig. Koſten 20 Meter 20 Pf., ſo ꝛc.

In dieſer Weiſe wird nun jede folgende Zahl behandelt, und der Lehrer wird nun im Stande ſein, den Lehrgang ſelbſt weiter zu führen. Wir raten übrigens ſehr zu einer ſchriftlichen Präparation, etwa auf je einen Zehner — damit nichs von dem behandelten Stoffe unbenutzt liegen bleibe, und der Schüler auf die zweckmäßigſte Weiſe zum Selbſtbilden der Aufgaben veranlaßt werde. Die Währungszahlen 24, 30, 50, 60 ꝛc. werden für das angewandte Rechnen längeren Aufenthalt darbieten, während bei der 23, 29 ꝛc. mehr bloß das reine Zahlenverhältnis beachtet wird. Wir teilen bloß noch einige Stufen mit.

---

*) wird vorgezeigt und mit dem Meterſtabe gemeſſen!

Dreißigſte Stufe.

Die Dreißig.

(3mal 2 Hände.)

I. a. „Wenn ich zu 29 noch 1 Einer ſetze, ſo wird der dritte Zehner voll."

„Drei Zehner zuſammengenommen nennt man Dreißig."

Meſſen mit 1:

Aufwärtszählen mit 1 im Chor:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (Halt! Ein Schüler ſpricht: Wir ſind im 1ſten Zehner, es fehlen noch 3 Einer, bis der erſte Zehner voll iſt, und noch 20 Einer an 30.)

8, 9, 10, 11 — (wir ſind im 2ten Zehner ꝛc.) u. ſ. f.

Abwärtszählen:

30, 29, 28 — (wir ſind im 3ten Zehner, vom 3ten Zehner ſind 2 Einer weggenommen) u. ſ. f.

$1 : 30 = 30.$

Meſſen mit 2:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 — (wir ſind im 2ten Zehner, es fehlen noch 3 Zweier, bis der 2te Zehner voll iſt, und noch 5 Zweier, bis der 3te Zehner voll iſt) ꝛc.

$15 \times 2 = 30.$

Abwärtszählen mit 2:

30, 28, 26, 24 — (wir ſind im 3ten Zehner, haben 3 Zweier vom 3ten Zehner weggenommen, bleiben noch 2 Zweier im 3ten Zehner übrig).

$2 : 30 = 15.$

u. ſ. f. bis

Meſſen mit 10:

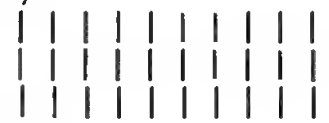
$10 + 10 = 20,\ 20 + 10 = 30.$

$3 \times 10 = 30.$

$30 - 10 = 20,\ 20 - 10 = 10.$

$10 : 30 = 3.$

Schriftlich:



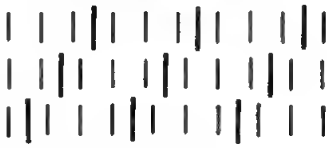
$3 \times 10 = 30.$

$30 = 30 \times 1.$	$1 : 30 = 30.$
$15 \times 2.$	$2 : 30 = 15.$
$10 \times 2.$	$3 : 30 = 10.$
$7 \times 4\ (+ 2).$	$4 : 30 = 7\ (2).$
$6 \times 5.$	$5 : 30 = 6.$
$5 \times 6.$	$6 : 30 = 5.$
$4 \times 7\ (+ 2).$	$7 : 30 = 4\ (2).$
$3 \times 8\ (+ 6).$	$8 : 30 = 3\ (6).$
$3 \times 9\ (+ 3).$	$9 : 30 = 3\ (3).$
$3 \times 10.$	$10 : 30 = 3.$

Man laſſe hierbei die Striche abteilen, alſo nach Zweiern:

$30 = 15 \times 2.$

nach Dreiern:



Mündlich:

$30 = 29 + 1,\ 28 + 2,\ 27 + 3$ ꝛc.

Dann:

$30 = 30 \times 1$	(das 30fache von)	$1 = \frac{1}{30} \times 30$	(der 30ſte Teil).
15×2		$2 = \frac{1}{15} \times 30.$	
10×3		$3 = \frac{1}{10} \times 30.$	
6×5		$5 = \frac{1}{6} \times 30.$	
5×6		$6 = \frac{1}{5} \times 30.$	
3×10		$10 = \frac{1}{3} \times 30.$	
2×15		$15 = \frac{1}{2} \times 30.$	

Aus welchen gleichen Zahlen beſteht 30?

Aus welchen 2, 3, 4, 5, 6 ungleichen Zahlen?

b. 1 Mandel + 2 Stück + 4 St. + 1 St. + 8 St. ſind wie viel Stück (Mandel)?

1 Fünfer und 3 und 5 und 2 und 3 Pfennig ſind wie viel Pfennig?

Davon werden ausgegeben 1 Zehner und 2 Fünfer, 1 Zweier, 1 Zehner. Wie viel Fünfer bleiben?

Die Antwort muß immer augenblicklich da ſein!

4×6, die Hälfte, wieder die Hälfte, 5mal genommen giebt? ꝛc.

c. Vermindere 30 um 19!

$19 = 10 + 9,\ 30 - 10 = 20,\ 20 - 9 = 11.$ 30 um 19 vermindert iſt 11.

Wie erhältſt du das Doppelte von 15?

15 = 1 Zehner und 5 Einer. 2×1 Z. = 2 Z. 2×5 E. = 10 E. = 1 Z. 2 Z. + 1 Z. = 3 Z. = 30.

Vergleiche 30 mit 16!

30 = 3 Z. 16 = 1 Z. + 6 E. Ich muß zu den 6 E. noch 4 E. thun, um den 2ten Z. voll zu machen, und noch 1 Z., um 3 Z. zu erhalten. Alſo hat 30 1 Z. + 4 E. = 14 mehr als 16, und 16 iſt um 1 Z. + 4 E. oder um 14 kleiner als 30.

Das Zehnfache von 3 iſt eben ſo groß als das Sechsfache welcher Zahl?

Das Zehnfache von $3 = 10 \times 3 = 30.$ 30 iſt aber das Sechsfache von 5, alſo ꝛc.

Wie iſt 30 aus 7 entſtanden?

Da 7 in 30 4mal enthalten iſt mit dem Reſte von 2, ſo muß ich 7 4mal nehmen und 2 hinzuthun, um 30 zu bekommen.

Wenn ich von einer Zahl das 3fache von 5 abziehe, erhalte ich das 5fache von 3. Welches ist die Zahl?

Die Fragezahl muß gleich sein dem 3fachen von 5 + dem 5fachen von 3, oder 15 + 15 = 30.

II. 30 Meter = 3 Ketten oder Dekameter.
30 Gramm = 3 Neulot oder Dekagramm.
30 Liter = 3 Dekaliter.
30 Schoppen = 15 Liter oder Kannen.
30 Stück = 2 Mandel = 2 Dutzend 6 Stück oder 2½ Dutzend.
30 Tage = 1 Monat = 4 Wochen 2 Tage.
30 Monat = 2 Jahr 6 Monate = 2½ Jahr.
30 Buch Papier = 1 Rieß 10 Buch = 1½ Rieß.
30 Rieß = 3 Ballen.
30 Neuscheffel = 15 Faß.

1 Neulot hat, wie schon bekannt, 10 Gramm; wie viel Gramm sind 3 Neulot?

Wie viel Neulot stecken in 20, wie viel in 30 Gr.?

Ich kaufte ein halbes Dutzend Bleistifte für 30 Pfennig. Wie viel Pfennig kostete das Stück?

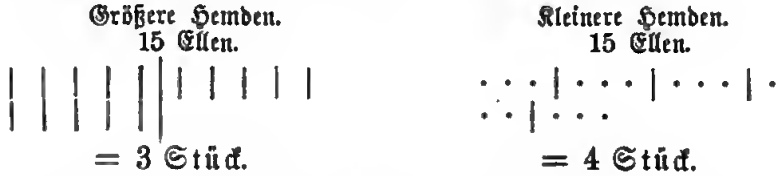
Ein halbes Dutzend = 6 Stück. Kosten 6 Stück 30 Pfennig, so kostet 1 Stück den 6ten Teil von 30 Pfennig = 5 Pfennig.

Ein Arbeiter bekam täglich 3 Mark. In wie viel Zeit hatte er 15 und 30 Mark verdient?

Wenn das Mandel Eier 30 Pfennig kostet, wie viel das Stück?

1 Mandel hat 15 Stück. Kosten 15 Stück 30 Pf., so ꝛc.

Aus einem Stück Leinewand von 30 Ellen Länge sollten Hemden verfertigt werden; die eine Hälfte sollte zu größeren, die andere Hälfte zu kleineren Hemden verschnitten, zu jenen 5, zu diesen 3 Ellen genommen werden. Wie viel Hemden konnten davon gemacht werden?

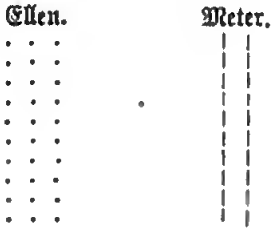


Das Verhältnis der Elle zum Meter kommt später in der Bruchrechnung zur Sprache.

Wir wollen jetzt 3 Ellen = 2 Meter setzen, wie viel Meter hätte jenes Stück Leinewand gehabt?*)

---

*) Wird gezeichnet:



Und wie viel Meter kamen auf das kleinere Hemde?

Ein Säckchen Kaffee enthielt 1 Kilogramm und 1 Pfund, und wurde mit 1 Thaler bezahlt. Wie viel Mark koſtete 1 Pfund?

Bei der Zahl

Sechsunddreißig

unterlaſſe der Lehrer nicht, aufmerkſam darauf zu machen, daß nicht weniger als 5 Grundzahlen (von den Primzahlen ſpäter!) ohne Reſt in 36 aufgehen. Es ſind die Zahlen 2, 3, 4, 6, 9. Welche von dieſen ſind aus kleineren zuſammengeſetzt? ($4 = 2 \times 2$, $6 = 3 \times 2$, $9 = 3 \times 3$). Welche Zahlen aus dem zweiten Zehner gehen ohne Reſt in 36 auf?

36 Stück? Dutzend, Mandel und Stück?

36 Monate? Jahr u. ſ. w.

Wie viel halbe Jahr ſind 36 Monate?

(36 Monate = 3 Jahr. Da 1 Jahr 2 halbe Jahr, ſo ſind 3 Jahr $3 \times 2 = 6$ halbe Jahr. Alſo ſind 36 Monat = 6 halbe Jahren. — Oder: ¼ Jahr hat 6 Monate. Da 6 Monate in 36 Monaten 6mal enthalten ſind, ſo ſind auch 36 Monate = 6 halbe Jahren.)

Wie viel Vierteljahr ſind 36 Monate?

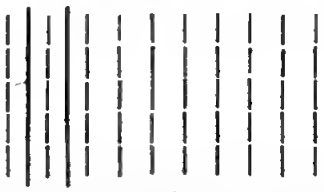
(36 Monate = 3 Jahr. Da 1 Jahr = ¼ Jahr, ſind 3 Jahr $3 \times \frac{1}{4} = 12$ Monat. — Oder: ¼ Jahr = 3 Monate. 3 Monat ſtecken in 36 Monaten 12 mal, alſo ſind 36 Monat 12 Vierteljahr.)

Teilen wir das Liter in 4 Teile und nennen jeden 1 Quart, ſo haben 2, 3, 4, 5 ꝛc. Liter wie viel Quart? 36 Quart ſind wie viel Liter?

Funfzigſte Stufe.

Die Funfzig.

I. a. Wie oben.



Wie viel Einer ſtehen ſenkrecht untereinander? Schreibt dieſe Fünfer in wagerechten Linien unter einander! Teilt die Zehner durch Querſtriche ab! Schreibt 50 in Zweiern; wie viel kommen unter einander? ꝛc.

Mündlich und Schriftlich:

$50 = 50 \times 1.$	$1 : 50 = 50.$
$25 \times 2.$	$2 : 50 = 25$
16×3 (2).	$3 : 50 = 16$ (2).
12×4 (2).	$4 : 50 = 12$ (2).
$10 \times 5.$	$5 : 50 = 10.$
8×6 (2).	u. ſ. w.
7×7 (1).	
6×8 (2).	
5×9 (5).	
$5 \times 10.$	

b. (Schnellrechnen):

2 Stück + 5 Stück + 6 Stück + 7 Stück 2mal genommen und noch 10 Stück?

Wie viel Stück, Mandel, Dutzend?

c. Der 5te Teil von 50 ist das Doppelte von welcher Zahl?

Die Hälfte von 50 ist das Fünffache von welcher Zahl?

Wie verhält sich das Fünftel von 50 zum Fünftel von 25?

Das Fünftel von 50 ist das Doppelte vom Fünftel von 25.

Das Fünftel von 25 steht in gleichem Verhältnis zum Fünftel von welcher Zahl? (Das Fünftel von 25 ist das Doppelte von welcher Zahl?)

II. 50 Meter ? Dekameter.

50 Buch ? Rieß.

50 Rieß ? Ballen.

50 Stück ? Mandel und Dutzend.

50 Pfennig ? Zehnpfennigstücke? Wie viel Zwanziger und Zehner haben 50 Pfennig? Wie viel Fünfer und wie viel Zweipfennigstücke?

50 Tage ? Monate u. s. w.

50 Neulot = 1 Pfund.

50 Kilogramm = 1 Centner.

50 Liter = 1 Neuscheffel.

Wie viel Neulot gehen auf $\frac{1}{2}$ Pfund, wie viel Kilogramm auf $\frac{1}{2}$ Centner, wie viel Liter auf $\frac{1}{2}$ Neuscheffel?

Ein Neuscheffel Korn wurde mit 5 Mark bezahlt, wie hoch kam 1 Liter?

5 Meter*) Seidenband kosten 50 Pfennig, wieviel ein halbes Meter?

Kosten 5 Meter 50 Pf., so kostet ein Meter 10 Pf., ein halbes Meter 5 Pfennig.

Eine Hausfrau ließ 1 Centner Schmelzbutter kommen und gab davon der Nachbarin 20 Kilogramm ab, zum Einkaufspreise. Die Nachbarin zahlte 20 Mark, wie viel Mark kostete der Centner?

1 Centner = 50 Kilogramm. Wurden für 20 Kilogramm 20 Mark bezahlt, so kostete 1 Kilogramm 1 Mark, 50 Kilogramm oder der Centner 50 Mark.

Wenn 1 Pfund 50 Neulot hat, so gehen wie viel Neulot auf $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ Pfund? wie viel auf $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{9}{10}$ Pfund?

Wenn 1 Pfund eine halbe Mark kostet, wie teuer ist da der Centner?

Kostet 1 Pfd. $\frac{1}{2}$ Mark, so gilt das Kilo 1 Mark, also der Centner = 50 Kilo 50 Mark.

Die Zahl

Sechzig

erfordert wieder längeren Aufenthalt.

Welche Zahlen im ersten, welche im zweiten, welche im dritten Zehner gehen in 60 ohne Rest auf?

60 Pfennig wie viel Zweipfennigstücke, wie viel Fünfer, Zehner, Zwanziger?

---

*) Die Metereinteilung nach dem Dezimalsystem wird bei der Zahl 100 eingeführt.

Ein 20 Markſtück in Gold (wird vorgezeigt) enthält wie viel Zweimarkſtücke und Fünfmarkſtücke (in Silber)? Wie viel goldene 5 Mark- und 10 Markſtücke? (werden vorgezeigt.)

Ich hatte eine Schuld von 60 Mark zu berichtigen und zahlte dieſe in 2 Goldſtücken und 4 Silbermünzen. Welche waren das?

Wie hätte ich ſie in 6, 8, 10 Geldſtücken bezahlen können?

Wenn man 3 Kilogramm Kaffee mit 2 Thaler bezahlt, wie viel Mark koſtet 1 Pfund?

3 Kilogr. = 6 Pfund. 2 Thlr. = 6 Mark. Koſten 6 Pfund 6 Mark, ſo koſtet 1 Pfund den 6ten Teil von 6 Mark = 1 Mark.

Wie viel Pfund kann man für 60 Mark kaufen, wenn das Kilo 10 Mark koſtet?

Koſtet das Kilo 10 Mark, ſo koſtet das Pfund 5 Mark, man kann alſo ſo viel Pund kaufen, als 5 Mark in 60 Mark enthalten ſind; alſo 12 Pfund.

60 Pfund ? Kilo.

60 Gramm ? Neulot.

60 Schoppen wie viel Liter?

(60 halbe Schoppen wie viel halbe, wie viel ganze Liter?)

60 Stück ? Dutzend und Mandel.

60 Tage ? Monate.

60 Monate ? Jahre.

1 Stunde = 60 Minuten. Wie viel Minuten haben $\frac{1}{4}$ Stunde, $\frac{1}{3}$ Stunde, $\frac{1}{2}$ Stunde, $\frac{3}{4}$ Stunden?

Um wie viel Minuten iſt $\frac{1}{2}$ Stunde länger als $\frac{1}{4}$ Stunde?

60 Buch ? Rieß.

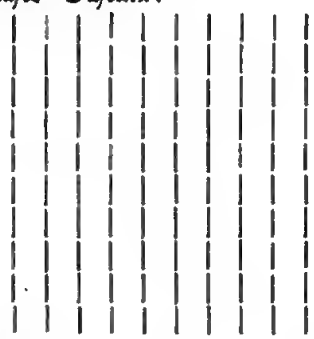
60 Rieß ? Ballen. ꝛc.

Hundertſte und letzte Stufe des erſten Kurſus.

Die Zahl Hundert.

I. a. Das Auf- und Abzählen mit den Zahlen von 1 bis 10, und ſowohl von 1 als 2 angefangen, muß ohne allen Anſtoß, ſchnell und ſicher von Statten gehen. Beim Chorzählen mag der Lehrer öfter halten laſſen, und die bekannten Fragen ſtellen.

Schriftliches Schema:



$10 \times 10 = 100.$

$100 = 100 \times 1.$	$1 : 100 = 100.$
$50 \times 2.$	$2 : 100 = 50.$
$33 \times 3\ (+ 1).$	$3 : 100 = 33\ (1).$
$25 \times 4.$	$4 : 100 = 25.$

$100 = 20 \times 5.$	$5 : 100 = 20.$
$16 \times 6\ (+ 4).$	$6 : 100 = 16\ (4).$
$14 \times 7\ (+ 2).$	$7 : 100 = 14\ (2).$
$12 \times 8\ (+ 4).$	$8 : 100 = 12\ (4).$
$11 \times 9\ (+ 1).$	$9 : 100 = 11\ (1).$
$10 \times 10.$	$10 : 100 = 10.$

$100 = 99 + 1,\ 98 + 2,\ 97 + 3$ ꝛc. bis $1 + 99.$

Muß ebenfalls ohne allen Anſtoß und ſchnell hintereinander hergeſagt werden.

100 iſt das 100fache von 1.	1 iſt der 100ſte Teil von 100.
50fache von 2.	2 iſt der 50ſte Teil von 100.
25fache von 4.	4 iſt der 25ſte Teil von 100.
20fache von 5.	5 iſt der 20ſte Teil von 100.
5fache von 20.	20 iſt der 5te Teil von 100.
2fache von 50.	50 iſt der 2te Teil von 100.

b. Das Einmaleins hat ſich im Laufe der Übungen von ſelbſt ergeben, und mag hier im Zuſammenhange repetiert werden. Der Lehrer kann von den Schülern die ſogenannte Pythagoräiſche Tafel anfertigen laſſen.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Dieſes Täfelchen und folgende Reihen ſind die einfachſte Darſtellung des Einmaleins:

$2 \times 1 = 2;\ 2 \times 2 = 4;\ 2 \times 3 = 6$ u. ſ. w.
$3 \times 1 = 3;\ 3 \times 2 = 6;\ 3 \times 3 = 9$ ꝛc.
$4 \times 1 = 4;\ 4 \times 2 = 8;\ 4 \times 3 = 12$ ꝛc.
bis
$10 \times 1 = 10;\ 10 \times 2 = 20$ ꝛc. ꝛc.; $10 \times 10 = 100.$

Der Schüler lerne hier den Satz erkennen, daß das Produkt daſſelbe bleibt, wenn man dieſelben Faktoren, gleich viel in welcher Reihe, multipliciert.

Außerdem ſind die 4 Spezies mit den Zahlen über 10 zu rechter Fertigkeit zu bringen, und dann verſchiedentlich zu kombinieren. Wir ſetzen einige Beiſpiele her.

α. (Addieren). $14 + 13 + 12 + 11$.
$15 + 17 + 19 + 18$.
$25 + 37 + 39 + 17$ ꝛc.

β. (Subtrahieren.) $90 - 16 - 12 - 11$.
$98 - 32 - 41 - 24$.
$90 - 16 - 17 - 27 - 29$ ꝛc.

γ. (Multiplizieren.) 3×30, 4×22, 2×44, 2×27, 3×25,
4×18, 12×5, 33×2, 35×2 ꝛc.

δ. (Dividieren.) $3 : 60$, $3 : 69$, $3 : 72$, $3 : 96$,
$4 : 60$, $4 : 72$, $4 : 84$, $4 : 96$,
$12 : 84$, $13 : 65$, $18 : 72$, $19 : 95$,
$4 : 53$, $5 : 62$, $9 : 32$, $18 : 40$,

ε. (Kombinieren.) Der Lehrer ſchreibt eine Reihe Ziffern an die Tafel, die erſten 2 durch einen Stock bezeichneten werden addiert oder multipliziert, von dieſer Summe oder dieſem Produkte die Summe der zwei darauf bezeichneten abgezogen.

Aufgaben wie dieſe müſſen ſchnell gelöſt werden:
$3 \times 29 - 4 \times 16 + 7 : 10 \times 9 \times 3$?

Der Lehrer rechne jederzeit die Aufgaben mit, welche er giebt. Das gilt für den ganzen Rechenunterricht, und iſt von der größten Bedeutung.

Als Prüfſtein, ob jede Zahl zur klaren Vorſtellung des Schülers gekommen iſt, diene nun die Übung, daß der Schüler die Zahlen von 1 bis 100 mit zwei ihrer Faktoren nennt; die Primzahlen werden bloß mit 1 gemeſſen. Wenn er mehrere Faktoren anzugeben weiß, wird das willkommen geheißen. Alſo:

1×1, 2×1, 3×1, 2×2, 5×1, 3×2 oder
2×3, 7×1, 4×2 oder 2×4, 3×3 ꝛc.

Es iſt für die Folge ſehr wichtig, daß der Schüler Zahlen wie 52, 68, 95 ꝛc. als 4×13, 4×17, 5×19 ꝛc. parat habe.

Darum mögen von den Schülern folgende Reihen entworfen und feſt eingeprägt werden:

$2 \times 11 = 22$	$2 \times 12 = 24$	$2 \times 13 = 26$
$3 \times 11 = 33$	$3 \times 12 = 36$	$3 \times 13 = 39$
$4 \times 11 = 44$	$4 \times 12 = 48$	$4 \times 13 = 52$
$5 \times 11 = 55$	$5 \times 12 = 60$	$5 \times 13 = 65$
u. ſ. f.	u. ſ. f.	u. ſ. f.
2×14 u. ſ. w.	bis	$5 \times 19 = 95$.

Dann werde aber auch die Tabelle der Primzahlen und einfachen Faktoren aufgeſtellt:

1 Primzahl
2 " "
3 " "
4 = 2 · 2.
5 Primzahl
6 = 2 · 3.
7 Primzahl
8 = 2 · 2 . 2
9 = 3 · 3
10 = 2 · 5
11 Primzahl
12 = 2 · 2 · 3
13 Primzahl
14 = 2 · 7
15 = 3 · 5
16 = 2 . 2 . 2 . 2.
17 Primzahl
18 = 2 · 3 · 3
19 Primzahl
20 = 2 · 2 · 5.

u. s. f. bis 100 fest einzuüben.

c. Von 100 Mark gab Jemand aus den 4ten Teil, und vom Reste den 3ten Teil; welchen Teil von der ganzen Summe behielt er noch?

Der 4te Teil von 100 Mark = 25 Mk. Wer von 100 Mk. 25 Mk. ausgiebt, behält noch 75 Mk. Wird von dieser Summe noch der 3te Teil = 25 Mk. weggenommen, so bleiben noch 50 Mk. übrig. 50 Mk. ist aber ein halbes Hundert.

Ich habe eine Zahl 3 mal genommen, und 4 mehr bekommen als ein halbes Hundert. Welche Zahl habe ich verdreifacht?

Die Zahl, welche 4 mehr ist, als ein halbes Hundert, ist 54. Ist 54 das Dreifache einer Zahl, so ist diese der dritte Teil von 54 = 18.

Von welcher Zahl ist das Fünffache um 5 Einer kleiner als 100?

Die Zahl, welche 5 Einer weniger hat, als 100, ist 95. Ist 95 das Fünffache einer Zahl, so steckt diese 5 mal in 95, oder ist der 5te Teil von 95 = 19.

75 ist das Dreifache des vierten Teiles von welcher Zahl?

75 ist = 3 × 25; ist 25 der 4te Teil einer Zahl, so ist diese 4 × 25 = 100. Also ist 75 das Dreifache des 4ten Teils von 100.

II. 100 Pfennig ? wieviel Zweier, Fünfer, Zehner, Zwanziger?
100 Mark wie viel in Goldstücken?
100 Neukreuzer machen 1 östr. Gulden. Wie viel Nkr. sind $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{20}$ Gulden?
Wie viel Nkr. hat $\frac{1}{4}$ Gulden mehr als $\frac{1}{5}$ Gulden?
100 Meter ? Ketten (Dekameter).
100 Gramm ? Neulot (Dekagramm).
100 Liter ? Dekaliter.
100 Schoppen ? Liter.
100 Stück ? Schock, Mandel und Dutzend.

100 Neuſcheffel ? Faß.
100 Liter ? Scheffel.
(1 Scheffel = 50 Liter.)
100 Liter nennt man 1 Hektoliter = 1 Faß.
100 Buch ? Rieß.
100 Rieß ? Ballen.
100 Neulot ? Pfund.
100 Kilogramm ? Centner.
100 Tage ? Monate, Wochen.
100 Monate ? Jahre.
Wie viel Liter gehen auf $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{25}$ Hektoliter?
$\frac{3}{4}$ Hektoliter ? Liter.

Wie viel Liter fehlen mir noch an 1 Hektoliter, wenn ich $\frac{3}{4}$ Hektoliter oder Faß habe?

In einen Sack geht gerade 1 Hektoliter Korn, in einen andern $1\frac{1}{2}$ Scheffel. Wie viel Liter (Scheffel) in den einen mehr?

Wie viel Neulot ſind $1\frac{1}{2}$ Pfund? Wie viel Neulot fehlen noch am 2ten Pfund?

Karl mußte 3 Packete auf die Poſt tragen, das erſte wog 1 Pfund, das zweite 10 Neulot, das dritte 40 Neulot. Wie viel alle zuſammen?

Nun kann auch die Metereinteilung vorgeführt werden.

Der Lehrer bringt den Meterſtab, auf welchem Decimeter und Centimeter eingeſchnitten ſind, in die Klaſſe, läßt mit dieſer Leiſte die Schultafeln meſſen (ein Kreideſtrich teilt ab), auch an die Schüler ſelbſt wird das Metermaß gelegt, ferner bemerkt, wie ſich die Länge der Lineale zum Meter verhält.

Die kleinſten Lineale ſollten 10 Centimeter oder Neuzoll, größere das Drei- und Vierfache betragen und auch die Centimeter markiert ſein.

Ein Meter, in 10 gleiche Teile geteilt, hat 10 Dezimeter.

Der Lehrer zeichnet 1 Meter in vollſtändiger Länge an die Wandtafel und teilt ihn in 10 gleiche Teile.

Zeigt mir 1, 2, 3, 4 ꝛc. Decimeter!

Nun wollen wir das Decimeter wieder in 10 gleiche Teile teilen. Wie viel ſolcher Teile kommen auf das Meter? Man nennt den 100ſten Teil des Meters 1 Centimeter (Neuzoll). Welcher Teil vom Decimeter iſt ein Centimeter? Welcher Teil vom Meter?

Wie viel Neuzoll hat $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ Meter?
Wie viel Decimeter ſind $\frac{3}{5}$ Meter, $\frac{4}{5}$ Meter, $\frac{3}{10}$ Meter?
Wie viel Centimeter ſind $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{50}$ Meter?
Wie viel Centimeter ſind $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{3}{25}$ Meter?
Vier Decimeter ſind wie viel Centimeter?
Wie viel Centimeter ſind 6, 7, 8, 9 — wie viel $2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$ Decimeter?

Damit ſich die Kinder zeitig daran gewöhnen, den verkleinerten Maßſtab auf die wirkliche Größe zu beziehen, ſo laſſe der Lehrer einen Strich

auf die Schiefertafel ziehen: der soll ein Meter vorstellen. Teilt diesen Strich in zehn Teile! Wie wird nun ein solcher Teil heißen?

Wenn aber dieser Teil 1 Meter vorstellte, wie viel würde der ganze Strich betragen? (Eine Kette.)

Auch die Kette ist an einem starken Bindfaden zu veranschaulichen und es können die Knoten daran die Meter abteilen. Sehr wünschenswert wäre es, wenn in jeder Schule eine Tafel aufgehängt wäre, auf welcher das neue Maß und Gewicht in natürlicher Größe dargestellt ist. Ich empfehle: Große Wandtafel des metrischen Systems als Anschauungsmittel bearbeitet von C. Bopp (Stuttgart bei Jul. Maier). Nebst Text Preis: 1 Thlr.

A. Salberg hat einen Veranschaulichungsapparat zusammengestellt, der mit Kiste und Verpackung 12 Mark kostet. Er enthält nach seiner eigenen Ankündigung: 1) die Hohlmaße zu 1 bis 4 Quart (Viertelsliter) mit entsprechenden Aufschriften und Bruchteilungen. 2) die Längenmaße von 1 bis 10 Dekameter. Einige Meterstäbe sind in Centimeter geteilt. 3) Eine Wage mit den Gewichten zu 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100 und 1000 Gramm. „Um das Gewicht als eine unsichere Wahrnehmung des Gefühls in eine Wahrnehmung durch das Auge gleich dem Längenmaße umzuwandeln sind 5 Zinkstäbe zu 1 bis 5 Dekagramm verwendet. Der Wagbalken dient zugleich als Hebel für den physikalischen Unterricht."

4) Ein Bruchdarstellungs- oder Gleichnamigmachungstabelle.

Letztere halte ich für weniger notwendig; 1—3 aber sollten der Schulklasse nicht fehlen.

Aufgaben:

Schreibt unter einander folgende Gramm und nennt beim Zusammenzählen gleich die Neulot:

9	Gramm				
8	"	1	Lot	7	Gramm.
7	"	2	"	4	"
14	"	2	"	8	"
6	"	3	"	4	"
6	"	4	"		"
5	"	4	"	5	" ꝛc.

Wie viel Lot sind 4 Lot 5 Gramm? (4½ Lot). Ebenso Stück und Dutzend.

Ein Bauer brachte 5 Gänse zu Markte, wofür er 21 Mark löste. Wie teuer verkaufte er das Stück?

Löste er für 5 Gänse 21 Mark, so bekam er für 1 Gans den 5ten Teil von 21 Mark. Der 5te Teil von 21 Mark sind 4 Mark, mit den Rest von 1 Mark. Der 5te Teil von 1 Mark sind 20 Pfennig. Also hatte er für jede Gans 4 Mark 20 Pfennig gelöst.

Eine Frau wollte aus einem Stück Leinwand von 100 Ellen Hemden machen lassen, und zwar größere und kleinere. Zu diesen wollte sie nur ⅕ des ganzen Vorrats verwenden, und es sollten 4 Ellen auf 1 Hemde kommen, während auf das größere 5 Ellen. Wie viel Stück von jeder Art erhielt sie?

Zu den kleineren Hemden sollte ⅕ von 100 Ellen = 20 Ellen kommen,

und da auf eins 4 Ellen genommen werden ſollten, ſo konnten 5 Stück von dieſer Sorte gemacht werden. Für die größeren Hemden blieben noch 100 – 20 = 80 Ellen übrig. Da auf eins 5 Ellen kamen, ſo konnten ſoviel Hemden daraus gemacht werden, als 5 in 80 enthalten iſt = 16 Hemden.

Auf ein kleines Feld wurden 25 Liter Hafer geſäet und nur 1 Hektoliter geerntet. Wie vielfach hatte man geerntet?

Karl mußte vier Wertpackete auf die Poſt tragen, von denen das erſte ein halbes Pfund, das zweite 1 Pfund, das dritte 10 Neulot, das vierte 15 Neulot wog. Er bezahlte für alle zuſammen 10 Mark Porto; wie viel Porto kam im Durchſchnitt auf 1 Lot?

Wenn das Schock Eier 6 Mark koſtet, ſo bezahlt man wie viel für 1 Mandel?

1 Schock = 4 Mandel. Koſten 4 Mandel 6 Mark, ſo koſtet 1 Mandel den 4ten Teil von 6 Mark = 1 Mark 50 Pfennig.

Zweiter Kurſus.

I.

Das Rechnen mit den Zahlen über 100.

Drittes (bezw. viertes) Jahr.

Erſtes Semeſter.

Rechnen im Zahlraum von 100 bis 1000.

(Denkrechnen).

Vorbemerkungen

1) Da alles fernere Rechnen nur Anwendung von der Anſchauung der Zahlen des erſten Hunderts iſt, ſo kann auch dieſer nun folgende Kurſus keinen andern Zweck haben, als die Zahlen von 100 bis 1000 auf die des erſten Hunderts zurückzuführen, d. h. *ſie in ihre Elemente zu zerlegen*;

2) damit erhält der Schüler zugleich das Geheimnis alles ſicheren und ſchnellen Kopfrechnens, nämlich ſtets *mit den möglichſt kleinſten Zahlen zu operieren*, und es bedarf jener ſogenannten Rechenvorteile und Kunſtgriffe nicht;

3) um aber erſt zu der *allſeitigen Vorſtellung* der Zahl zu führen, kann hier noch von keinem Rechnen der Spezies die Rede ſein: dieſe treten als ſolche (mit den Übungen des Schnellrechnens) erſt im zweiten Semeſter auf. Ebenſo iſt Kopf- und Zifferrechnen auf jeder Stufe vereinigt.

4) Da nunmehr auch die Notwendigkeit wegfällt, jede Zahl zu iſolieren, und nach den einzelnen Rubriken zu behandeln, wie im erſten Kur-

ſus geſchah, und wegen der allſeitigen Durchdringung der Zahl geſchehen mußte: ſo teilen wir unſern Stoff blos in die 2 Teile

A. Die reine Zahl (meſſen [zerlegen], vergleichen und kombinieren.)
B. Die angewandte Zahl.

A. Allſeitige Anſchauung der reinen Zahl.

(Erſtes Vierteljahr.)

Erſte Stufe.

Meſſen der Zahlen nach den dekadiſchen Einheiten der Einer, Zehner und Hunderter.

I. Entſtehung.

a. (Mündlich). Herauf- und Herunterzählen von 100 bis 1000. Durch Bohnen, Rechenpfennige und Stäbe veranſchaulicht. Ein Würfel = 1; ein Stab, worin 10 ſolcher Würfel enthalten (eingekerbt) ſind = 10 (1 Zehner); 10 ſolcher Stäbe (neben einander gelegt) bilden 1 Hundert; eine quadratiſche Säule von 1 Zoll Höhe, 10 Zoll Länge und 10 Zoll Breite = $\frac{1}{10}$ Kubikfuß; 10 ſolcher Säulen (auf dem Schultiſche aufgebaut) bilden 1 Tauſend (1 Kubikfuß). Wird mit Bohnen oder Rechenpfennigen (Marken) gezählt, ſo wird jedes Hundert, ſobald es voll iſt, in ein Säckchen gethan, und dieſes mit ſeinem Nachfolger zuſammengeſtellt. Damit die Kinder die Wucht der Zahl fühlen, mögen ſie auch anfangs Striche (genau in Zehnerreihen geordnet und ökonomiſch zuſammengedrängt) auf ihre Schiefertafel machen. Beim Zählen wird öfter Halt gemacht, und angegeben, in welchem Hundert und in welchem Zehner darin man ſich befindet, wie viel Einer und Zehner an dem reſp. Zehner und Hunderter noch fehlen, und (beim Herunterzählen) wie viel Hunderter von Tauſend weg, oder bis zum Tauſend hin ſind, z. B. bei der Zahl 768.

768 = 7 Hunderter, 6 Zehner, 8 Einer. Die 8 Einer gehören zum 7ten Zehner des 8ten Hunderts; es fehlen noch 2 Einer, bis der 7te Zehner voll iſt, noch 3 Zehner am 8ten Hundert und noch 2 Hunderter am Tauſend.

Beſtimme (auf die angegebene Weiſe) folgende Zahlen: 500, 501, 704, 174, 714, 829, 999 ꝛc.

Wie heißt die Zahl, welche 3 Hunderter, 6 Zehner und 5 Einer hat?

Wie viel Einer ſtecken in 7 Hunderter, 8 Zehner und 9 Einer zuſammengenommen?

Wie viel Einer hat ein Tauſender und wie viel Hunderter ſind das?

Wie heißt die Zahl, welche im 5ten Zehner des 6ten Hunderts 8 Einer ſtehen hat?

Wie iſt 669 entſtanden?

Dadurch, daß ich 6×100, 6×10 und 9×1 genommen habe.

b. (Schriftlich.)

Zur Erleichterung mögen die Schüler anfangs die verſchiedenen Einheiten in beſondere Käſten ſchreiben.

1	0	1	= 1 Hunderter, 0 Zehner, 1 Einer, = 101.
4	8	0	= 4 Hunderter, 8 Zehner, 0 Einer, = 480.
10	0	0	= 10 Hunderter, 0 Zehner, 0 Einer, = 1000.

Dann werden verſchiedene Zahlen dictando geſchrieben, die geſchriebenen geleſen, die Ziffer verſetzt (an der Leſemaſchine, Wandtafel und Schiefertafel) ꝛc., um die nötige Sicherheit im Zahlenſchreiben zu erzeugen.

Endlich werden dem Mündlichen analog ſchriftlich diktierte Zahlen aufgelöſt, als:

$615 = 6 \times 100 + 1 \times 10 + 5 \times 1.$
$204 = 2 \times 100 + 0 \times 10$ (kein Zehner) $+ 4 \times 1.$
$390 = 3 \times 100 + 9 \times 10 + 0 \times 1.$
$1000 = 10 \times 100 + 0 \times 10 + 0 \times 1.$

Oder:

$615 = 600 + 10 + 5.$
$204 = 200 + 4.$
$390 = 300 + 90$
$1000 = 1000.$

Da das Tafel- und Kopfrechnen in keinem Gegenſatze ſteht, ſo werden wir auf den folgenden Stufen der Kürze halber beides vereinigt darſtellen, in der Vorausſetzung, daß der Lehrer die mündliche Entwickelung jederzeit der ſchriftlichen Darſtellung vorangehen laſſe.

Zweite Stufe.

Die reinen Hunderte gemeſſen mit Hunderten.

(Allſeitiges Anſchauen — Meſſen und Vergleichen, Schnellrechnen, Kombinieren — ganz wie im erſten Kurſus.)

Im erſten Kurſus war bei der Zahl „zwei“ folgendes Schema gewonnen:

$1 + 1 = 2.$
$2 \times 1 = 2.$
$2 - 1 = 1.$
$1 : 2 = 2.$

Demgemäß lernt nun der Schüler:

200

$100 + 100 = 200.$
$2 \times 100 = 200.$
$200 - 100 = 100.$
$100 : 200 = 2.$

Welche Zahl ſteckt zwei Mal in 200?
Von welcher Zahl iſt 200 das Doppelte?

Von welcher Zahl ist 100 die Hälfte?
Welche Zahl muß ich verdoppeln, um 200 zu bekommen? ꝛc.
(S. die 2te Stufe des 1ten Kursus.)

300

a.
$100 + 100 + 100 = 300.$
$3 \times 100 = 300.$
$100 : 300 = 3.$
$200 + 100 = 300.$
$300 - 100 = 200.$
$300 - 200 = 100.$
$200 : 300 =$ 1 mal mit dem Rest von 100 (ich kann die 200 von 300 1 mal wegnehmen, und behalte 100 zum Rest.)

300 ist 100 mehr als 200, 200 mehr als 100.
200 ist 100 weniger als 300, 100 mehr als Hundert.
100 ist 200 weniger als 300, 100 weniger als 200.
300 ist das Dreifache von 100.
100 ist das Drittel von 300.

Aus welchen gleichen und aus welchen ungleichen Zahlen besteht 300?

b. Wie viel ist $300 - 100 - 100 + 200$ geteilt durch 100?

c. Von welcher Zahl kannst du das Doppelte von 100 wegnehmen, und behältst doch noch 100 übrig? ꝛc.

400

a. 1. Messen mit 100:
$100 + 100 + 100 + 100 = 400.$
$4 \times 100 = 400.$
$400 - 100 - 100$ ꝛc.
$100 : 400 = 4.$

2. Messen mit 200:
$200 + 200 = 400.$
$2 \times 200 = 400.$
$400 - 200 = 200.$
$200 : 400 = 2.$

3. Messen mit 300:
$300 + 100 = 400.$
$100 + 300 = 400.$
$1 \times 300 + 100 = 400.$
$400 - 200 = 200.$
$400 - 100 = 300.$
$300 : 400 = 1$ (100).
400 ist 100 mehr als 300.
200 " " 200.
300 " " 100.
300 ist 100 weniger als 400.
100 mehr als 200.
200 " " 100 ꝛc.

Dritte Stufe.

Die gemischten Hunderte gemessen mit gemischten Hunderten.
(Erweiterung der vorigen Stufe.)

Nennt das 2-, 3-, 4-, 5- ꝛc. fache von 110!

$440 = 4 \times 110$, aber auch 2×220.
$660 = 6 \times 110$, " " 3×220,
$880 = 8 \times 110$, " " 4×220. 2×440.
$990 = 9 \times 110$, " " 3×330.

Wie kannst du 888, 990 betrachten?

$888 = 8 \times 111$, aber auch 4×222, 2×444.
$999 = 9 \times 111$, 3×333.

Wenn sich 333 in 999, 3 in 999, 2 in 888 ꝛc. ꝛc. teilen, wie viel bekommt ein Jeder?

Von welcher Zahl ist 120 der 3te, 4te, 5te Teil?

Welche Zahl ist gleich dem Viertel von 844?

Von welcher Zahl ist 844 das Vierfache?

Welche Zahl kann ich 4 mal von 844 wegnehmen?

Welche Zahl ist 4 mal in 844 enthalten?

Die Hälfte von 844 hat wie viel mehr als ihr Viertel?

Das Drittel von 333 ist das Sechstel von welcher Zahl?

Das Drittel von $333 = 111$, 111 ist das Sechstel von $6 \times 111 = 666$ also ist das Drittel von 333 das Sechstel von 666.

Von welcher Zahl ist das Drittel von 333 das Neuntel?

Das Drittel von $333 = 111$, ist 111 das Neuntel einer Zahl, so ist diese $9 \times 111 = 999$.

Vergleiche 365 mit 244!

365 = 3 H. + 6 Z. + 5 E.; 244 = 2 H. + 4 Z. + 4 E.; − 3 H. − 2 H. = 1 H.; 6 Z. − 4 Z. = 2 Z.; 5 E. − 4 E. = 1 E. Also 365 − 244 = 1 H. + 2 Z. + 1 E. = 121, oder 365 ist um 121 größer als 244, und 244 ist um 121 kleiner als 365.

Wie viel beträgt der Unterschied zwischen 743 und 120?

743 = 7 H. + 4 Z. + 3 E.; 120 = 1 H. 2 Z.; 7 H. − 1 H. = 600. 4 Z. − 2 Z. = 2 Z. 3 E. − 0 E. = 3 E. Also ꝛc.

Welche Zahl ist gleich der Summe von 743 + 221?

743 = 7 H. + 4 Z. + 3 E.; 221 = 2 H. + 2 Z. + 1 E. − 7 H. + 2 H. = 9 H. ꝛc.

Wie viel ist 112 + 113 + 114?

Ziehe von 659 ab 322 und 124?

Wie viel ist 111 + 212 + 313?

(Entsprechende Übungen, bis Sicherheit da ist.)

Vierte Stufe.

Meſſen der Hunderter mit dem Zehner.

I. a. Die reinen Hunderter.

Iſt $100 = 10 \times 10$, ſo iſt

2×100 oder $200 = 2 \times 10 \times 10 = 20 \times 10$,
3×100 oder $300 = 3 \times 10 \times 10 = 30 \times 10$,
4×100 oder $400 = 4 \times 10 \times 10 = 40 \times 10$,
10×100 oder $1000 = 10 \times 10 \times 10 = 100 \times 10 = 1000$.

b. Die Hunderter mit Zehnern.

Iſt $100 = 10 \times 10$, ſo iſt

$110 = (10 \times 10) + (1 \times 10) = 11 \times 10$,
$120 = (10 \times 10) + (2 \times 10) = 12 \times 10$,
$130 = (10 \times 10) + (3 \times 10) = 13 \times 10$,
$190 = (10 \times 10) + (9 \times 10) = 19 \times 10$,
$240 = (20 \times 10) + (4 \times 10) = 24 \times 10$,
$990 = (90 \times 10) + (9 \times 10) = 99 \times 10$.

c. Die Hunderter mit Zehnern.

Iſt $100 = 10 \times 10$, ſo iſt $101 = (10 \times 10) + 1$,
$109 = (10 \times 10) + 9$,
$906 = (90 \times 10) + 6$,
$814 = (81 \times 10) + 4$ ꝛc.

Wie viel Zehner gehören zu 500, 900, 1000?
Welche Zahl beſteht aus 53 Zehnern?
Welche Zahl hat 9 Einer mehr als 53 Zehner?
Das Wievielfache der Zehn iſt 660, 420, 870?
Von welchen Zahlen iſt die Zehn der 42ſte, 66ſte ꝛc. Teil?
Wie iſt 879 aus dem Zehner entſtanden?
Ich habe den Zehner 87 mal geſetzt, und 9 Einer hinzugefügt.

II. 1) Vergleiche 400 mit 900!

400 = 40 Z., 900 = 90 Z., 90 Z. − 40 Z. = 50 Z., alſo hat 900 50 Z. mehr als 400, und 400 hat 50 Z. weniger als 900.

2) Wie viel ſind 55 Zehner weniger als 600? als 660? als 990?

Da 600 = 60 Z., ſo muß ich zu 55 Z. noch 5 Z. hinzufügen, um 600 zu bekommen; 55 Z. ſind alſo 5 Z. weniger als 600 ꝛc.

3) Die Summe 880 iſt aus welchen 4 gleichen Zehner-Poſten zuſammengeſetzt?

880 = 88 Z., da 88 Z. = 4 × 22 Z., ſo iſt 880 aus 4 mal 22 Zehnern zuſammengeſetzt.

4) Welche Summe geben 800, 180 und 20?

800 + 180 + 20 = 80 + 18 + 2 Z. = 100 Z. = 1000.

5) Welches iſt der Unterſchied von 160 und 210?

210 oder 21 Z. weniger 160 oder 16 Z. = 5 Z. oder 50, alſo iſt der Unterſchied von 160 und 210 = 50.

6) Das Sechzigfache der Zehn iſt das Wievielfache von Hundert?

Das Sechzigfache von 10 = 60 Z. = 600 = 6 × 100. Alſo iſt das Sechzigfache der Zehn das Sechsfache des Hunderts.

7) Ich kenne eine Zahl, die hat 8 Zehner und 9 Einer mehr als 490. Welche Zahl ist das?

Die Zahl, welche 8 Z. und 9 E. mehr hat als 490, muß 490 + 8 Z. + 9 E. betragen. 490 oder 49 Z. + 8 Z. = 57 Z. = 570; 570 + 9 = 579. Also ist 579 die Zahl, welche ꝛc.

8) Ich habe eine Zahl 87 mal genommen und 9 Einer hinzugefügt und 879 erhalten. Welche Zahl ist das?

Da 879 = 87 Z. + 9 E., so habe ich die Zehn 87 mal genommen und 8 Einer dazu gethan, und 879 bekommen.

9) Wie viel Zehner hat das 73fache eines Zehners mehr als das Doppelte von 240?

10) Wie oft steckt der 100ste Teil von 1000 in 500?

Da 1000 = 100 Z., so ist der 100ste Teil von 1000 = 1 Z.; dieser steckt aber in 500 = 50 Z. 50 mal.

11) Das Drittel von 630 ist das Viertel welcher Zahl?

Das Drittel von 630 = 210 = 21 Z., 21 Z. sind das Viertel von 4 × 21 Z. = 84 Z. = 840.

12) Der 68ste Teil von 680 und 24ste Teil von 240 zusammengenommen sind wie viel weniger als das Zehnfache von 36?

Da 680 = 68 Z., so ist der 68ste Teil von 680 = 1 Z.; ebenso der 24ste Teil von 240 = 1 Z.; beides zusammen = 2 Z. Das Zehnfache von 36 = 36 Zehnern, 36 Z. — 2 Z. = 34 Z. Also ꝛc.

An diese Übungen schließt sich natürlich an die

Verwechselung der Faktoren.

110 = 11 × 10 = 10 × 11 (110 ist das 11fache von 10, und das 10fache von 11).
220 = 22 × 10 = 10 × 22 (220 ist das 22fache ꝛc.).
680 = 68 × 10 = 10 × 68.
990 = 99 × 10 = 10 × 99.
Wie ist 990 entstanden?
Wie bildest du aus 13 130?
Wie ist aus 28 280 gebildet?
Welche Zahl muß ich verzehnfachen, um 670 zu bekommen?
Von welcher Zahl ist 67 der 10te Teil?
Wie heißt der 67ste Teil von 670?
Wie oft steckt 79 in 790?
Welche Zahl kann ich 10 mal von 790 wegnehmen? welche 79 mal?
Das 79fache des Zehners ist gleich dem Zehnfachen welcher Zahl?
Diese Übung leitet nun passend zur folgenden Stufe über.

Fünfte Stufe.

Allseitiges Messen der Zahlen durch ihre Faktoren.

Mit der Anschauung der Hunderter als Vielfache des Zehners und Hunderters ist alle weitere Zerlegung gegeben, weil der Schüler nunmehr

bloß die bekannten Elemente der 100 oder der Zehnerzahlen unter 100 auf ihr Vielfaches anzuwenden hat.

I. a. Die reinen Hunderter.

$100 = 2 \times 50,\ 4 \times 25,\ 5 \times 20,\ 10 \times 10$, alſo
$200 = 2 \times 2 \times 50 = 4 \times 50.$
$2 \times 4 \times 25 = 8 \times 25.$
$200 = 2 \times 5 \times 20 = 10 \times 20.$
$2 \times 10 \times 10 = 20 \times 10.$
$300 = 3 \times 2 \times 50 = 6 \times 50.$
$3 \times 4 \times 25 = 12 \times 25.$
$3 \times 5 \times 20 = 15 \times 20.$
$3 \times 10 \times 10 = 20 \times 15.$
ꝛc.

b. Die Hunderter mit Zehnern.

$220 = 10 \times 22.$ Da $10 = 2 \times 5$, ſo iſt
$220 = 2 \times 5 \times 22 = 2 \times 110$; und da $22 = 2 \times 11$,
$10 \times 2 \times 11 = 10 \times 22$, und da 10 auch $= 5 \times 2$,
$5 \times 2 \times 22 = 5 \times 44.$
$960 = 10 \times 96.$
$10 \times 2 \times 48 = 20 \times 48 = 48 \times 20,$
$10 \times 3 \times 32 = 30 \times 32 = 32 \times 30,$
$10 \times 4 \times 24 = 40 \times 24 = 24 \times 40,$
$10 \times 6 \times 16 = 60 \times 16 = 16 \times 60,$
$10 \times 8 \times 12 = 80 \times 12 = 12 \times 80,$

Oder den zweiten Faktor unverändert gelaſſen:

$10 \times 96 =$
$2 \times 5 \times 96 = 2 \times 480,$
$5 \times 2 \times 96 = 5 \times 192.$

c. Die Hunderter mit Zehnern und Einern.

$426 = (10 \times 42) + 6$ oder $(4 \times 100) + 26,$
$(10 \times 2 \times 21) + 6 = (20 \times 21) + 6,$
$(10 \times 3 \times 14) + 6 = (30 \times 14) + 6 = 14 \times 30 + 6,$
$(2 \times 5 \times 42) + 6 = (2 \times 210) + 6,$
$(5 \times 2 \times 42) + 6 = (5 \times 84) + 6.$
$896 = (8 \times 100) + (8 \times 12) = 8 \times 112.$
$(8 \times 112) = 2 \times 4 \times 112 = 2 \times 448.$
$4 \times 2 \times 112 = 4 \times 224.$
$(10 \times 89) + 6 = (2 \times 5 \times 89) + 6 = 2 \times 445 + 6.$
$(5 \times 2 \times 89) + 6 = (5 \times 178) + 6.$
$489 = (10 \times 48) + 9.$
$(2 \times 240) + 9.$
$(5 \times 96 + 9.)$

Oder:

$$(10 \times 4 \times 12) + 9 = (40 \times 12) + 9 = (12 \times 40) + 9.$$
$$(10 \times 3 \times 16) + 9 = (30 \times 16) + 9 = 16 \times 30 + 9.$$
$$(10 \times 2 \times 24) + 9 = (20 \times 24) + 9.$$

Aus wie viel Zweiern, Dreiern, Fünfern ist 300 zusammengesetzt?

Wie findest du den 25sten Teil von 300?

Der 25ste Teil von $100 = 4$, der 25ste Teil also von $300 = 3 \times 4 = 12$.

Wie ist 300 aus 15 entstanden?

Da $300 = 10 \times 30$, und $30 = 2 \times 15$, so ist $300 = 10 \times 2 \times 15 = 20 \times 15$. Ich habe also 15 20mal genommen, und 300 erhalten. Oder: da $300 = 2 \times 150$, und $150 = 10 \times 15$, so ist $300 = 2 \times 10 \times 15 = 20 \times 15$.

Wie oft muß ich 44 nehmen, um 220 zu bekommen?

$220 = 10 \times 22 = 5 \times 2 \times 22 = 5 \times 44$. Ich muß also ꝛc.

Welche Zahl muß ich 5 mal von 426 wegnehmen, um 6 zum Rest zu erhalten?

$426 = 10 \times 42 + 6 = 5 \times 2 \times 42 + 6 = 5 \times 84 + 6$. Ich muß also ꝛc.

Wie oft steckt 24 in 489?

$489 = 10 \times 48 + 9 = 10 \times 2 \times 24 + 9 = 20 \times 24 + 9$.
Also steckt 24 in 489 20mal mit dem Reste von 9.

II. 1) Welches ist der Unterschied von 980 und 377?

Der Unterschied von 980 und 377 = 980 — 377. 980 = 98 Zehner, und 377 = 37 Z. + 7 E. 98 Z. — 37 Z. = 61 Z. — 7 E. = 60 Z. + 3 E. = 603. Oder: 900 — 300 = 600, 80 — 77 = 3, also 980 — 377 = 603.

2) Der Unterschied von 980 und 377 ist das Dreifache welcher Zahl?

Der Unterschied von 980 und 377 = 603. Ist 603 das Dreifache einer Zahl, so ist diese der 3te Teil von 603. Der 3te Teil von 600 = 200, von 3 = 1. Also ꝛc.

3) Das Drittel und Viertel von 480 zusammengenommen ist um wie viel Einer kleiner als das Doppelte von dieser Zahl?

4) Durch welche Zahl muß ich 365 teilen, um 5 zu erhalten?

Wenn ich 365 mit einer Zahl teile und 5 erhalte, so steckt diese 5mal in 365 oder ist der 5te Teil von 365. Der 5te Teil von 300 = 60, der 5te Teil von 65 = 13; also ist der 5te Teil von 365 = 60 + 13 = 73, also muß ich 365 durch 73 teilen, um 5 zu erhalten.

5) Welcher Unterschied ist zwischen dem 22sten und 30sten Teile von 660?

6) Die Summe von 326 und 418 ist um wie viel mehr als die Summe ihrer Hälften?

7) Ich nehme von einer Zahl 4 Einer weg, suche hierauf den 16ten Teil, und erhalte 60. Welches ist jene Zahl?

Die unbekannte Zahl ist = $16 \times 60 + 4$. 60 = 6 Z. 16×6 Z. = 96 Z. = 960, dazu 4 Einer = 964. Also ist 964 die Zahl, von welcher ich 4 weggenommen und den 16ten Teil, als 60, erhalten habe.

8) Welche Zahl ist 10 mehr als das Doppelte des Fünffachen von 99?

Sechste Stufe.

Allseitiges Auflösen der Zahlen von 1 bis 1000 in ihre Elemente.

Aus der Anschauung der Faktoren einer Zahl und ihrer Reste ergiebt sich die Anschauung ihrer Elemente überhaupt. Weil diese Stufe die Schnelligkeit und Sicherheit im Zerlegen zum Grunde hat, so kömmt es hier nicht darauf an, in welcher Ordnung die Teile genannt werden. Der Schüler muß es in der Beobachtung der Zahlen nun so weit gebracht haben, daß er ihre augenfälligsten Bestandteile jederzeit präsent hat. Der Lehrer nennt in beliebiger Reihe die zu zerlegenden Zahlen, und läßt sie teils mündlich, teils schriftlich auflösen.

360

$300 + 60$	$3 \times 100 + 3 \times 20$
$180 + 180$	3×120
$200 + 160$	10×36
$320 + 40$	5×72
$336 + 24$	$20 \times 10 = 18 \times 20$
ꝛc.	9×40
	ꝛc.

365

$320 + 45$, $2 \times 150 + 65$, $2 \times 182 + 1$,
$7 \times 50 + 15$, $14 \times 25 + 15$, $18 \times 20 + 5$ ꝛc.

B. Allseitiges Anschauen der angewandten Zahl.

(Zweites Vierteljahr.)

Vorbemerkungen.

Wie der erste Abschnitt das notwendige Material zu allem ferneren reinen Zahlrechnen (im Kopf wie mit der Ziffer) darreichte, so soll nun dieser zweite das Material für das angewandte Rechnen liefern. Dies besteht aber darin, daß er sein bisheriges Messen der Zahlen von 1 bis 1000 auf die Verhältnisse der bekanntesten Anwendungsgrößen, als Thaler, Groschen, Pfund, Lot ꝛc. anwenden lerne, und so in der Vorstellung der reinen Zahlverhältnisse um so sicherer werde. Da bei jedem Exempel alle 4 Spezies in Anwendung kommen, um eben die allseitige Anschauung zu erzeugen: so tritt hier noch die Operation des Addierens, Subtrahierens ꝛc. als solche ganz zurück.

a. Die Zehnerzahlen.

10 Gramm = 1 Dekagramm oder Neulot.
50 Neulot = 1 Pfund.
100 Neulot = 1 Kilogramm.
50 Kilogramm = 1 Zentner.
60 Stück = 1 Schock.
50 Liter = 1 Scheffel.

Verschiedene Aufgaben außer der Reihe.

1) 9, 11, 17, 28 Mark wie viel 5 Markstücke?
2) 9 Mark 14 Pfennig, 28 Mark 29 Pfennig ? Pfennig?
3) 314, 365, 720, 799 Pfund ? Kilogramm?

Zähle zusammen: 25 Pfennig + 9 Pfennig + 17 Pfennig + 15 Pfennig? Wie viel Pfennig? Zwanzig Markstücke? Wie viel Zehn-Markstücke?

Von 2 Mark 6 Pfennig nimm weg 15 Pfennig — 17 Pfennig — 1 Mark wie viel bleibt?

Eine Abteilung nennt (laut) das Dreifache der vom Lehrer angegebenen Zahl, eine andere Abteilung zählt diese Dreifachen (still) zusammen.

L.			Sch.		
	5	Pfennig		15	Pfennig.
	9	"		27	"
	47	"	1 Mark	41	"
	15	"		45	"
			Andere Abteil.	2 Mark	28 Pfennig.

Durch Teilung jedes Postens rechts mit 3 wieder das links stehende Exempel hergestellt.

Bei längeren Exempeln können die einzelnen Posten auch aufgeschrieben werden; es werden z. B. vom Lehrer folgende Posten an die Wandtafel geschrieben:

14	Mark	15	Pfennig
15	"	16	"
16	"	17	"
17	"	18	"
18	"	19	"
19	"	20	"

Frage: Wie viel betragen die ersten beiden Posten zusammen?

Ein Schüler tritt an die Wandtafel und schreibt rechts vom zweiten Posten: 29 Mark 31 Pfennig u. s. f. bis die Hauptsumme gewonnen ist.

Hierauf werden, 2, die einzelnen Posten von der Totalsumme abgezogen, bis der erste oder letzte Posten als Rest bleibt.

Endlich, 3, ein Vervielfachen der Posten mit 2, 3, 4 ꝛc., Summieren dieser Posten, und Teilen der Summe durch 2, 3, 4 ꝛc., wo sich dann die erste Summe wieder ergiebt.

Auf ähnliche Weise 1 Schock bis 16 Schock in Stück.
1 Zentner bis 9 Zentner in Pfund.

b. Die Zehner und Einer.

Da wir nach dem neuen Münz-, Maß- und Gewichtssystem nicht mehr nötig haben mit Währungszahlen wie 12, 15, 24 zu rechnen, so fällt ein nicht geringer Teil früherer Übungen im Vervielfachen und Teilen fort. Doch möchte das Vervielfachen und Teilen mit 12 und 15 nicht zu vernachlässigen sein und das 12×1 bis 12×12, sowie das 15×1 bis 15×15 ist jedenfalls fest dem Gedächtnisse einzuprägen.

1 Mandel bis 15 Mandel in Stück.
1 Dutzend bis 24 Dutzend in Stück.

Aufgaben:

Wenn 16 Dutzend Metallknöpfe 9 Mark 60 Pfennig kosten, wie viel das Stück?

Wenn 16 Dutzend 9 Mark 60 Pf. = 960 Pf. kosten, so kostet 1 Dutzend den 16ten Teil von 960 = 60 Pf. 1 Stück den 12ten Teil von 60 Pf. = 5 Pfennig.

Wenn 1 Knopf 5 Pfennig kostet, wie viel Dutzend kann man dann für 9 Mark 60 Pfennig kaufen?

9 Mark 60 Pf. = 960 Pf. Kostet ein Knopf 5 Pf., so kostet das Dutzend 60Pf. — 60 Pf. sind in 960 16mal enthalten, also kann ich für 9 Mark 60 Pf. 16 Dutzend kaufen.

Schnelles Zusammenzählen;

1 Dutzend 2 Stück + 9 Stück + 4 Stück + 3 Dutzend 5 Stück + 6 Stück — wie ? Stück? (14 Stück + 9 Stück + 4 Stück + 4 Stück + 6 Stück) 1 Mandel + 10 Stück + 5 Stück + 6 Stück + 2 Mandel 3 Stück?

Was kostet 1 Stück, wenn 3 Mandel 4 Mark 50 Pfennig kosten?

4 Mark 50 Pf. = 450 Pf. 3 Mandel = 45 Stück. Kosten 45 Stück 450 Pf., so kostet 1 Stück den 45sten Teil von 450 Pf. = 10 Pfennig.

b. Die Teile des Zentners und Pfundes.

1	Zentner	=	50	Kilogramm	
½	"	=	25	"	
⅕	"	=	10	"	
⅖	"	=	20	"	
⅗	"	=	30	"	
⅘	"	=	40	"	

Und ebenso:

1	Kilogramm	=	2	Pfund	=	100	Lot.
½	"	=	1	"	=	50	"
¼	"	=	½	"	=	25	"
⅛	"	=	¼	"	=	12½	"

c. Die Teile des Schockes.

1	Schock	=	60	Stück.
½	"	=	30	" 2 Mandel.
⅓	"	=	20	"
¼	"	=	15	" 1 "
⅕	"	=	12	" 1 Dutzend.
⅖	"	=	24	" 2 " ꝛc.
⅙	"	=	10	"
1/10	"	=	6	"
1/12	"	=	5	"
1/15	"	=	4	"

$\frac{1}{20}$ Schock = 3 Stück
$\frac{1}{30}$ " = 2 "
$\frac{1}{60}$ " = 1 "

Und umgekehrt.

Das ist genügend als Grundlage für die späteren Übungen, muß aber eben als solche ganz fest dem Gedächtnisse eingeprägt sein. Dann wird der Schüler von selbst auf die „Vorteile" bei den Operationen der Spezies kommen; beim Addieren z. B. mit Hülfe seines Einmaleins die gleichen oder fast gleichen Zahlen einer Reihe zusammenfassen; bei benannten Zahlen mäßige Summen gleich im Kopf reduzieren u. s. f.

II.

Die 4 Spezies in benannten und unbenannten Zahlen — in beliebigem Zahlraum.

(Regelrechnen.)

Dritten bezw. vierten Jahres:

Zweites Semester.

Vorbemerkungen.

Nachdem in den beiden ersten Kursen die Zahlobjekte allseitig angeschaut und beobachtet sind, tritt nun die Übung und Fertigkeit in den einzelnen Operationen jener Anschauung hervor, das Zifferrechnen als solches macht sich geltend, und die Operation als solche bildet den Einteilungsgrund. Demnach wird nun die Anordnung des Stoffes folgende:

A. Rechnen mit unbenannten Zahlen.

b. Schriftlich.
1) Numerieren,
2) Addieren,
3) Subtrahieren,
4) Multiplizieren,
5) Dividieren.

B. Rechnen mit benannten Zahlen.

a. Mündlich.
1) Numerieren (Resolvieren und Reduzieren),
2) Addieren,
3) Subtrahieren,
4) Multiplizieren,
5) Dividieren,
6) Multiplikations- } Regel-de-trie.
7) Divisions- }

Dabei ist nun aber das Kopf- und Zifferrechnen nicht also geschieden, als ob beides ein Verschiedenes wäre, also auch in verschiedenen Stunden absolviert würde; sondern das „Kopfrechnen" als die Zahl

anſchauende und vorſtellende Thätigkeit bildet überall die Grundlage und den Ausgangspunkt, an welchen ſich die ſchriftliche Darſtellung durch die Ziffer, als ein bequemes und zweckmäßiges Mittel, längere Zahlenreihen durch Niederſchreiben ſich überſichtlich zu erhalten, anſchließt. So nur wird das Zifferrechnen in ſeinem Konnex als Denkrechnen erhalten.

Aus demſelben Grunde ſollen auch die einzelnen Operationen, obwohl ſie um der Fertigkeit willen vereinzelt werden, doch nicht einſeitig ſich ausſchließen, ſo daß beim „Addieren" nur addiert, beim Subtrahieren nur „ſubtrahiert" werden müßte: ſondern die in den vorigen Kurſen angebahnte allſeitige Anſchauung der Zahlen wird auch hier fortgeſetzt und ſoll nie ausgeſetzt werden, denn ohne dies gingen wir des erlangten Gewinnes für ein „beobachtendes" Anſchauen verluſtig. Iſt aber eine Aufgabe recht intenſiv verarbeitet, dann werden eine Menge anderer ihr nachgebildet, um eine beſtimmte Form der Ausrechnung zur Fertigkeit zu bringen. Es dürfen dann namentlich die Übungen im Schnellrechnen nicht vernachläſſigt werden, zumal da hier gerade die Schüler in angeregtem Wetteifer der geſpannteſten Aufmerkſamkeit ſich hingeben.

Wir deuten auf jeder Stufe bloß das Weſentliche der Übung an, die weitere Ausführung dem Lehrer überlaſſend, der ja in den neueren ganz zweckmäßigen Aufgaben-Sammlungen einen methodiſch geordneten und völlig gebahnten Gang, ſo wie das nötige Material vorfindet.

A. Rechnen mit unbenannten Zahlen.

Erſte Stufe.

Das Numerieren.

a. Mündlich.

α. Tauſender und Millioner. Sind die 10 Hunderter voll, ſo haben wir abermals eine neue Einheit gewonnen, die wieder von 1 bis 999 gezählt werden kann (5 Tauſend, 50 Tauſend, 500 Tauſend, 800 Tauſend, 900 Tauſend u. ſ. w.). Kommt zu 999 Tauſend noch 1 Tauſend, ſo giebt das 1000 Tauſend (1000 mal Tauſend) oder 1 Million. Der Würfel, der früher 1 vorſtellte, kann auch 1 Tauſend vorſtellen. Hat 1 Kubikzoll 1000 Kubiklinien, ſo enthält 1 Kubikfuß 1 Millionen Kubiklinien. Wenn in jedem Beutel 1000 Bohnen wären, wie viel Beutel brauchte man zu 1 Million? Wie viel zu einer halben, Viertel-Million?

β. Wie aber die Einheit, welche wir Tauſender nennen, niedere Einheiten, nämlich Hunderter und Zehner in ſich begreift, ſo unterſcheidet man auch Zehntauſende und Hunderttauſende.

Wie 1×1 Einer $= 1$ Einer $= 1$, ſo iſt
10×1 Einer $= 1$ Zehner $= 10$,
10×1 Zehner $= 10$ Zehner $= 100$,
10×1 Hunderter $= 1$ Tauſender $= 1000$,
10×1 Tauſender $= 1$ Zehntauſender $= 10{,}000$,
10×1 Zehntauſender $= 1$ Hunderttauſenden $= 100{,}000$,
10×1 Hunderttauſender $= 1$ Million $= 1{,}000{,}000$.

Die Schüler sprechen in derselben Weise durch:

1×2 Einer $= 2$ Einer $= 2$,
10×2 Einer $= 2$ Zehner $= 20$,
10×2 Zehner $= 2$ Hunderter $= 200$ ꝛc.

u. s. f. bis 9×2.

Dann umgekehrt:

1 Einer $= 1 \times 1$ Einer,
1 Zehner $= 10 \times 1$ Einer, $= 10$ Einer,
1 Hunderter $= 10 \times 1$ Zehner $= 100$ Einer,
1 Tausender $= 10 \times 1$ Hunderter $= 100 \times 1$ Zehner $=$ 1000 Einer. ꝛc.

Nennen wir die Einheiten der Einer die Einheiten der ersten Ordnung, so sind die Zehner die Einheiten der zweiten Ordnung ꝛc.; die Einheiten jeder folgenden Ordnung sind das Zehnfache der vorhergehenden; in jeder Ordnung giebt es bloß 10 Einheiten, und zwar ist die zehnte Einheit immer die erste der nachfolgenden Ordnung.

b. Schriftlich.

Wir wollen die Zahl 1852 so schreiben, daß Einer, Zehner, Hunderter, Tausender — jeder in einen besonderen Kasten kommt.

1	8	5	2

Zählen wir von rechts nach links, so kommen die Einer in den 1sten Kasten, die Zehner in den 2ten Kasten, die Hunderter in den 3ten Kasten, die Tausender in den 4ten Kasten, die Zehntausender in den 5ten Kasten, die Hunderttausender in den 6ten Kasten, die Tausendtausender oder Millionen in den 7ten Kasten.

7	6	5	4	3	2	1
6	0	9	2	1	6	0

6 Million
0 (kein) Hunderttausender
9 Zehntausender
2 Tausender
1 Hunderter
6 Zehner
0 Einer

kürzer: 6 Millionen 92 Tausend 1 Hundert und 60.

Wie nennt man die Einheiten der 1ten, der 3ten, der 5ten, der 7ten Ordnung?

Wie würden die Einheiten der 8ten Ordnung heißen? (Zehnermillionen.)

8	7	6	5	4	3	2	1
9							
	9						
		9					
			9				
				9			
					9		
						9	
							9

8	7	6	5	4	3	2	1
		4					9
						9	0
					9	0	0
				9	0	0	0
			9	0	0	0	0
		9	0	0	0	0	0
	9	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0

90,000,000
9,000,000
900,000
90,000
9,000
900
90
9

99 Millionen 9 Hundert und 99 Tauſend 9 Hundert und 99.

In ein zweites Netz werden nun vom Lehrer Zahlen diktiert, dann ohne dieſe Hülfe geſchrieben aber in ihre Einheiten aufgelöſt, als

6096 = 6000 oder 6000 + 90 + 6.
000
90
6

— eine gute Vorbereitung auf die folgende Stufe. Mit tauſendmal tauſend Millionen braucht ſich der Lehrer nicht abzuquälen, auch nicht mit Millionen überhaupt. Nur auf ſenkrechte Säulen werde ſtreng gehalten, und der Übung willen mögen längere Reihen diktiert werden.

Zweite Stufe.

Das Addieren.

Mündlich und ſchriftlich.

a. Mit einſtelligen Zahlen.

4 E. + 5 E. = 9 E. (4 + 5 = 9).
4 Z. + 5 Z. = 9 Z. = 90 E. (40 + 50 = 90).
4 H. + 5 H. = 9 H. = 900 E. (400 + 500 = 900).
4 T. + 5 T. = 9 T. = 9000 E. (4000 + 5000 = 9000).
4 Zehntauſ. + 5 Zehntauſ. = 9 Zehntauſ. = 90,000 E. (40,000 + 50,000 = 90,000).

b. Mit zweistelligen und einstelligen Zahlen.
43 E. + 5 E. = 48 E. (43 + 5 = 48).
43 Z. + 5 Z. = 48 Z. = 480 E. (430 + 50 = 480).
2c.

c. Mit zweistelligen und zweistelligen Zahlen.
43 E. + 28 E. = 71 E. (43 + 28 = 71).
43 Z. + 28 Z. = 71 Z. = 710 E. (430 + 280 = 710).
2c.

d. Mit dreistelligen und einstelligen Zahlen.
416 E. + 8 E. = 424 E. (416 + 8 = 424).
416 Z. + 8 Z. = 424 Z. = 4240 E. (4160 + 80 = 4240).
2c.

e. Mit dreistelligen und zweistelligen Zahlen.
416 E. + 23 E. = 439 E. (416 + 23 = 439).
416 Z. + 23 Z. = 439 Z. = 4390 E. (4160 + 230 = 4390).
416 H. + 23 H. = 43,900 E. (41,600 + 2300 = 43,900).
416 T. + 23 T. = 439 T. = 439,000 E. (416,000 + 23,000 = 439,000).

f. Mit dreistelligen und dreistelligen Zahlen.
416 E. + 123 E. = 539 E. (416 + 223 = 539).
416 Z. + 123 Z. = 539 Z. = 5390 E. (4160 + 1230 = 5390).
416 H. + 123 H. = 539 H. = 53,900 E. (41,600 + 12,300 = 53,900).
415 T. + 123 T. = 539 T. = 539,000 E. (416,000 + 123,000 = 539,000).

Die entsprechenden Reihen für das Schnellrechnen.

a.
7 + 8 + 9 + 6
70 + 80 + 90 + 60
700 + 800 + 900 + 600
7000 + 8000 + 9000 + 6000
70000 + 80000 + 90000 + 60000
700000 + 800000 + 900000 + 600000.

b.
25 + 9 + 3 + 9
250 + 90 + 30 + 80.
2c.

c.
25 + 36 + 47 + 58
250 + 360 + 470 + 580.
2c.

d.
254 + 6 + 8 + 9
2540 + 60 + 80 + 90
25400 + 600 + 800 + 900.
2c.

e.
254 + 27 + 38 + 49
2540 + 270 + 380 + 490
25400 + 2700 + 3800 + 4900.

f. $254 + 316 + 449$
$2540 + 3160 + 4490.$

Dann außer der Reihe, besonders mit Übergang aus einem Zehner in den andern.

Die unsern Gang gewandelten Schüler werden auf die etwaigen „Vorteile" von selbst kommen, so z. B. $229 + 398$ mit Hilfe der Subtraktion berechnen als $300 + 300 - (1 + 2)$, oder $163 + 167 + 162$ mit Hilfe der Multiplikation 3×16 Z. und $(3 + 7 + 2)$ Einer, oder statt $59 + 60 + 61 = 3 \times 60$ rechnen. Die Kleinen zeigen sich oft sehr erfindungsreich, wenn die Aufgabe gestellt wird, ein Exempel auf verschiedene Weise aufzulösen. Daß der Lehrer nicht diese oder jene Vorteile seinen Schülern vordozieren dürfe, braucht wohl kaum erinnert zu werden.

Auf die schriftliche Form des Addierens werden die Schüler stufenweis hingeführt; z. B. $36 + 24 + 15 + 23 + 50 = 30 + 20 + 10 + 20 + 50 = 130$; und $6 + 4 + 5 + 3 = 18$; $130 + 18 = 148$. Bequemer in eine senkrechte Säule geschrieben

1)

		kürzer:
36		$\overset{3}{\widetilde{36}}$
24		24
15		15
23		23
50		50
18	Einer	148
13	Zehner	
148	Einer.	

2)

	bequemer:	kürzer
365	365	365
:21	21	21
1430	1430	1430
2045	2045	2045
320	320	320
3000	11	4181
1000	170	
170	1000	
11	3000	
4181	4181	

3)

		$\overset{2.1\,2}{\widehat{5946}}$
5946	5946	
847	847	847
239	239	239
6320	6320	6320
11000	22	13352
2200	130	
130	2200	
22	11000	
13352	13352	

„Weil durch das Zusammenzählen der niederen Einheiten sehr oft Einheiten der höheren Ordnung entstehen, ist es bequemer, bei der Einerreihe die Addition anzufangen."

Das Rechnen sollte in der scharfen, bestimmten Ausdrucksweise der Geometrie ebenbürtig zu werden trachten. Die mathematische Schärfe und logische Reinheit der Sprache wirkt höchst vorteilhaft auf die Klarheit und Schärfe des Denkens. Man halte darum die Sorgfalt darin nicht für übertrieben oder den geometrischen Anstrich für zu luxuriös. Von einem Additionsexempel wie 5625 + 3918 + 335 + 4260 sollte der Schüler Folgendes sicher auszusagen wissen. [Es handelt sich bei jeder Auflösung um die drei Fragen:]

a. Was ist als bekannte Zahl gegeben? (Bedingung.)
b. Welche Zahl wird gesucht? (Frage.)
c. Was ist mit den bekannten Zahlen zu thun, um die unbekannte zu finden? (Operation.)

„Es sind mir die Zahlen 5625 ꝛc. ꝛc. als Posten gegeben, zu denen ich die Summe suchen soll. Da die Summe gleich ist den Posten zusammengenommen, muß ich sie zusammenzählen."

„Ich schreibe die Zahlen nach der Ordnung der Einheiten senkrecht untereinander, und suche zuerst die Summe der Einer. Diese beträgt 23. Da 23 Einer = 2 Z. + 3 E., so zähle ich die 2 Zehner zu der folgenden Zehnerreihe zu, und bemerke bloß die drei Einer" u. s. f.

Um das Wesen der Addition noch mehr zum Bewußtsein zu bringen, und eine größere Allseitigkeit in den Operationen zu gewinnen, gebe der Lehrer umgekehrt erst die Summe und lasse diese in ihre Posten zerlegen; z. B.

Eine Summe 64028 ist aus 4 Posten zusammengesetzt; der erste (a) ist die Hälfte der ganzen Summe — (der Schüler findet a = 32014), der zweite ist die Hälfte des ersten (b = 16007), der dritte ist um 6007 Einheiten kleiner, als der zweite (c = 10000), und der vierte ist um 3993 kleiner als der dritte (d = 6007).

(a)	32014
(b)	16007
(c)	10000
(d)	6007

1) Die Summe e sei unbekannt und soll gesucht werden.

„Die Posten a, b, c, d sind die Teile der Summe e, also e = a + b + c + d."

2) Es sei a unbekannt. Wie findest du aus e und den 3 bekannten Posten den unbekannten?

3) Wie aus a, c, d und e — b? ꝛc.

4) Was bleibt, wenn du a, b, c, d von e wegnimmst?

Die Auflösung giebt zugleich eine Probe der Richtigkeit der Summe.

Dritte Stufe.

Das Subtrahieren.

Mündlich und schriftlich.

a. Mit einstelligen Zahlen.
9 E. — 5 E. = 4 E. (9 — 5 = 4).
9 Z. — 5 Z. = 4 Z. (90 — 50 = 40).
9 H. — 5 H. = 4 H. (900 — 500 = 400.)
ꝛc.

b. Mit zweistelligen und einstelligen Zahlen.
12 E. — 5 E. = 7 E. (12 — 5 = 7).
12 Z. — 5 Z. = 7 Z. (120 — 50 = 70).
ꝛc. ꝛc.

Ganz in der Weise wie bei der Addition.
Von 9456 soll weggenommen werden 7321!

a.
$$\begin{array}{rl} 9456 = & 9000 + 400 + 50 + 6 \\ -\ 7321 = & 7000 + 300 + 20 + 1 \\ \hline & 2000 + 100 + 30 + 5 = \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9456 \\ -\ 7321 \\ \hline 2135 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rl} 4325 - 1123 = & 4325 \text{ Vollz.} \\ & 1123 \text{ Abz.} \\ \hline & 3202 \text{ Rest.} \end{array}$$

c. (Borgen ohne Nullen.)

1)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 6\ 15\ 18} \\ 17.6.8 \\ 6\,7\,9 \\ \hline 10\,8\,9 \end{array} = \begin{array}{r} 17.6.8 \\ 6\ \ 9 \\ \hline 10\,8\,9 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\ 13\ 12} \\ 45.4.2 \\ 41\,5\,9 \\ \hline 03\,8\,3 \end{array} = \begin{array}{r} 45.4.2 \\ 41\,5\,9 \\ \hline 3\,8\,3 \end{array}$$

d. (Borgen mit Nullen.)

1)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 15\ 10} \\ 74.6.0 \\ 32\,6\,9 \\ \hline 7\ \ 41\,9\,1 \end{array} = \begin{array}{r} 74.6.0 \\ 32\,6\,9 \\ \hline 41\,9\,1 \end{array}$$

(9 Einer von 0 Einern kann ich nicht abziehen, ich borge bei den Zehnern und nehme von 6 Z. einen Z. weg, was ich durch einen Punkt hinter der 6 andeute. Der weggenommene Zehner = 10 Einer; von 10 E. 9 Einer abgezogen, bleibt noch 1 Einer, u. s. f.)

2)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 9} \\ {\scriptstyle 10\ 16} \\ 74.0.6 \\ 32\,6\,9 \\ \hline 41\,3\,7 \end{array} = \begin{array}{r} 7\overset{\frown}{4.0}6 \\ 32\,69 \\ \hline 41\,37 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 9} \\ {\scriptstyle 10.\ 13\ 16} \\ 7.0\,4.6 \\ 3\,2\,6\,9 \\ \hline 3\,7\,7\,7 \end{array} = \begin{array}{r} 7.\overset{\frown}{0\,4}.6 \\ 3\,2\,6\,9 \\ \hline 3\,7\,7\,7 \end{array}$$

$$4)\quad \begin{array}{r} {\scriptstyle 9} \\ {\scriptstyle 10.\,10} \\ 74.00 \\ 32\,69 \\ \hline 41\,31 \end{array} = \begin{array}{r} 74.00 \\ 32\,69 \\ \hline 41\,31 \end{array}$$

$$5)\quad \begin{array}{r} {\scriptstyle 9} \\ {\scriptstyle 6\,10.\,10\,14} \\ 7.004 \\ 3269 \\ \hline 3735 \end{array} = \begin{array}{r} 7.004 \\ 3269 \\ \hline 3735 \end{array}$$

$$6)\quad \begin{array}{r} {\scriptstyle 9} \\ {\scriptstyle 10\,10.\,10} \\ 7.000 \\ 3269 \\ \hline 3731 \end{array} = \begin{array}{r} 7.000 \\ 3269 \\ \hline 3731 \end{array}$$

$$7)\quad \begin{array}{r} {\scriptstyle 9} \\ {\scriptstyle 10.10.10.16} \\ 7.0006 \\ 32687 \\ \hline 37309 \end{array} = \begin{array}{r} 7.0006 \\ 32697 \\ \hline 37309 \end{array}$$

7 Einer von 6 E. können nicht abgezogen werden, ich borge bei den Zehnern diese haben nichts, ich borge bei den Hunderten, diese haben auch nichts, u. s. f. ich borge bei den Zehnertausendern; von 7 Zehntausendern 1 Zehntaus. weggenommen, bleiben noch 6 Zehntaus., was ich durch den Punkt hinter der 7 andeute. Der Zehntaus. hat 10 Tausender, von diesen nehme ich 1 T. weg, und es bleiben hier noch 9 T., was ich durch den Bogen über der 0 andeute; das eine Tausend hat 10 Hunderter; von diesen nehme ich ein H. weg, und lasse hier 9 H., was ich wieder durch ꝛc.; das 1 H. hat 10 Zehner, von diesen nehme ich 1 Z. weg, und lasse bei den Zehnern 9 stehen, was ich wieder ꝛc. Der weggenommene Zehner hat 10 Einer, welche ich zu den 6 Einern hinzufüge und 16 Einer erhalte. 7 Einer von 16 Einern bleiben 9 Einer ꝛc.

Bevor sich der Schüler in dieser Weise nicht ganz fertig über seine Operation aussprechen kann, gehe man nicht zum schnellen Tafelrechnen über.

Begriff des Subtrahierens.

Wir knüpfen an die Erläuterung des Addierens an. Von 2 Posten heißt a 3480, b 2375, wie groß ist die Summe c? (c = 3480 + 2375 = 5855.) Wie groß ist a? (a = 5855 — 2375.) Wie groß ist b? (b = 5855 — 3480.) Wie wurde c gefunden? (Durch Addieren der Posten a und b.) Wie findest du a oder b? (Durch Subtrahieren des bekannten Postens a oder b von ihrer gemeinschaftlichen Summe.) Wie nennen wir beim Subtrahieren die bekannte Summe? (Vollzahl oder Minuendus.) Wie heißt der bekannte Posten? (Abzugszahl oder Subtrahendus.) Wie der zu suchende? (Rest, Unterschied, Differenz.) Wenn mir die Vollzahl unbekannt wäre, wie würde ich sie finden? (Durch Addition des Subtrahendus und Unterschiedes.)

$$\begin{array}{r} 5855 \\ -\ 3480 \\ \hline 2375 \\ +\ 3480 \\ \hline 5855 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5855 \\ -\ 3475 \\ \hline 3480 \\ +\ 2375 \\ \hline 5855 \end{array} \Bigg\} \text{Probe.}$$

Wodurch kann ich also erproben, ob ich richtig subtrahiert habe?

Wie heißt das Ganze bei einer Subtraktionsaufgabe? wie bei einer Additionsaufgabe?

Wodurch unterscheidet sich das Subtrahieren vom Addieren?

Dort ist mir das Ganze und ein Teil gegeben, und ich soll den andern Teil finden, hier sind mir die Teile gegeben, um daraus das Ganze zu bilden.

Die Summe 5855 sei aus 3 Posten zusammengesetzt, von denen der erste = 1320, der zweite = 1427, wie heißt der dritte?

$$\left.\begin{array}{l}5855 - 1320 - 1427 = \\ 5855 - (1320 + 1427)\end{array}\right.$$

585 5	132 0		
132 0	+ 142 7	Probe:	3108
453.5	274 7		+ 1320
142 7	585.5		1427
310 8	− 274.7		5855
	310 8		

Vierte Stufe.

Das Multiplizieren.

Mündlich und schriftlich.

1) Der Multiplikator einstellig.

a. Der Multiplikand einstellig.

3 × 9 Einer = 27 Einer (3 × 9 = 27).
3 × 9 Zehner = 27 Zehner (3 × 90 = 270).
3 × 9 Hunderter = 27 H. (3 × 900 = 2700) ꝛc.

b. Der Multiplikand zweistellig.

3 × 29 = 87 E. (3 × 29 = 3 × 20 = 60
3 × 9 = 27
87).

3 × 29 Zehner = 87 Z. (3 × 290 = 870).
3 × 29 Hunderter ꝛc.

c. Der Multiplikand dreistellig.

3 × 529 Einer = 1587 E. (3 × 500 = 1500
3 × 20 = 60
3 × 9 = 27
1587).

3 × 529 Zehner = 1587 Z. (3 × 5290 = 15870).
3 × 529 Hunderter = 1587 H. (3 × 52900 = 158700).
ꝛc.

d. Der Multiplikand vierstellig.

3×5239 E. $= 15879$ E. ($3 \times 5000 = 15000$
$3 \times 200 = 600$
$3 \times 90 = 270$
$3 \times 3 = 9$
15879).

3×5293 Z $= 15879$ Z. ($3 \times 52839 = 158790$).

3×5293 Hunderter $= 15879$ Hunderter ($3 \times 529300 = 1587900$.)

2) Der Multiplikator zweistellig.

a. Die reine Zehnerzahl.

α. Multiplikand einstellig.

60×5 Einer $= 300$ E. ($60 \times 5 = 300$).
60×5 Z. $= 300$ Z. ($60 \times 50 = 3000$).
60×5 Hund. $= 300$ Hund. ($60 \times 500 = 30000$).
60×5 T. $= 300$ T. ($60 \times 5000 = 300000$).

β. Multiplikand zweistellig.

60×56 E. 3360 E. ($60 \times 50 = 3000$
$60 \times 6 = 360$
3360).

60×56 Z. $= 3360$ Z. ($60 \times 560 = 33600$).

2c.

γ. Multiplikand dreistellig.

6×562 E. $= 33720$ E. ($60 \times 500 = 30000$
$60 \times 60 = 3600$
$60 \times 2 = 120$
33720).

60×562 Z. $= 33720$ Z. ($60 \times 5620 = 337200$).

b. Gemischte Zehnerzahl.

α. 25×9 E $= 225$ E. ($20 \times 9 = 180$
$5 \times 9 = 45$
225).

25×9 Z. $= 225$ Z. ($25 \times 90 = 2250$).

β. 25×96 E. $= 2400$ E. ($20 \times 96 = 1920$
$5 \times 96 = 480$
2400).

25×96 Z. $= 2400$ Z. ($25 \times 960 = 24000$).

3) Der Multiplikator dreistellig.

a. Reine Hunderter.

α. Multiplikand einstellig.

300×9 E. $= 2700$ E. ($300 \times 9 = 2700$).
300×9 Z. $= 2700$ Z. ($300 \times 90 = 27000$).
300×9 H. $= 2700$ H. ($300 \times 900 = 270000$).

β. Multiplikand zweistellig.

300×91 E. $= 27300$ E. $(300 \times 90 = 27000$
$300 \times 1 = 300$
$27300)$.

300×91 Z. $= 27300$ Z. $(300 \times 910 = 273000)$.

γ. Multiplikand dreistellig.

300×914 E. $= 274200$ $(300 \times 900 = 270000$
$300 \times 10 = 3000$
$300 \times 4 = 1200$
$274200)$.

b. Gemischte Hunderter.

304×9 E. $= 2736$ E. $(300 \times 9 = 2700$
$4 \times 9 = 36$
$2736)$.

304×9 Z. $= 2736$ Z. $(304 \times 90 = 27360)$.
304×9 H. $= 2736$ H. $(304 \times 900 = 273600)$.

Das ist genügend, ja fast schon zu viel, indem das Multiplizieren mit 2 Stellen für die gewöhnlichen Fälle vollkommen ausreicht. Es folgen nun Reihen für das Schnellrechnen.

a. Mit Verbindung der Addition und Subtraktion.
b. Mit bloßer Multiplikation.

Form für das Tafelrechnen.

1) Der Multiplikator ist einziffrig und zwar
   a. ohne Nullen,
   b. mit Nullen.

Der Multiplikandus bietet entweder keinen Übergang in einen andern Zehner dar (aa), oder es findet ein solcher Statt (bb); dabei enthält er entweder keine Nullen (α) oder Nullen (β).

2) Der Multiplikator ist zweiziffrig
   wiederum a, b
   aa, bb
   α β
   u. s. f.

1) a, aa, α. Wie viel ist 3×3213?

$3 \times 3213 = 3 \times 3000 = 9000$
$3 \times 200 = 600$
$3 \times 10 = 30$
$3 \times 3 = 9$
9639

Kürzer:

3213
3 ×
9
30
600
9000
9639

Am kürzeſten:

3213
3
9639

a, bb, α. Wie viel iſt 3 × 3226?

3 × 3226 = 3 × 3000 = 9000
3 × 200 = 600
3 × 20 = 60
3 × 6 = 18
9678

3226
3 ×
18
60
600
9000
9678

=

3226
3
9678

a, bb, β. Wie viel iſt 3 × 4046?

3 × 4046 = 3 × 4000 = 12000
3 × 40 = 120
3 × 6 = 18
12138

4046
3 ×
18
120
12000
12138

=

4046
3
12138

b, aa, α. Wie viel iſt 3 × 32130?
Wie viel iſt 3 × 321300?
Wie viel iſt 3 × 3213000?

3 × 32130 = (3 × 3213) × 10 (Zehner)
3 × 3213 = 3213
3
9639

10 × 9639 = 96390. Alſo:
3 × 32130 = 32130
3
96390

Der Schüler abſtrahiert die Regel, daß ſo viel mal ich eine Null an das Produkt hänge, ſo oft ich auch mit 10 multipliziere.

Daraus folgt, daß, wenn ich eine Zahl mit Zehnern, Hunderten ꝛc. zu multiplizieren habe, ich dieselbe nur mit den Einern der resp. Ordnung zu vervielfältigen brauche, und dann so viel Nullen anhänge, als die Ordnung verlangt, z. B. 345 × 2068 =

```
   20 6 8
    3 4 5 ×
  ---------
  103 4 0   Produkt der Einer
  827 2(0)  Produkt der Zehner
 6204(0 0)  Produkt der Hunderter
 ---------------------------------
 7134 6 0   Haupt-Produkt.
```

Kürzer:

```
  2068
   345
 -----
 10340
 8272
6204
------
713460
```

Begriff des Multiplizierens.

Wie oft mußt du 112 zu sich selber zählen, um 336 zu bekommen? Thue das!

```
 112
 112
 112
-----
 336
```

Wie kannst du das kürzer ausdrücken?

Ich nehme 112 3 mal.

```
 112  (a)
   3  (b)
 -------
 336  (c)
```

Wie viel Zahlen hast du in vorstehendem Exempel:

Was ist das Ganze, was der Teil?

Was ist a? (Ein Teil von c.)

Was sagt dir b? (Wie oft ich den Teil a nehmen soll, um das Ganze zu bekommen.)

Was ist c? (Das Ganze.)

Wie entsteht c aus a?

Dadurch, das ich a und b multipliziere.

Wie nennt man den Teil, welchen ich multipliziere, um das Ganze zu bekommen? (Multiplikandus) ꝛc.

Was ist der Multiplikandus, Multiplikator, das Produkt?

Den Multiplikandus und Multiplikator nennt man auch mit dem gemeinschaftlichen Namen „Faktoren", denn sie „machen" zusammen das Produkt.

Welches sind die Faktoren von 620, 1000 ꝛc.

Wenn 336 = 3 × 112, so muß ich 112 wie oft von 336 subtrahieren können? Thue das!

336
112 —
224 —
112 —
112
112 —
000.

Probe.

Der Schüler würde sich also über eine Multiplikationsaufgabe also aussprechen:

209 × 3148?

Der Multiplikandus ist 3148. Diese Zahl ist ein Teil des noch unbekannten Produkts. Der Multiplikator ist 209, und sagt mir, wie oft ich den Teil 3148 nehmen soll, um das Ganze zu bekommen. Ich muß also 3148 209mal nehmen. Dies geschieht, indem ich 3148 erst mit 9 Einern multipliziere. Das Produkt der Einer ist 28,332. Hierauf multipliziere ich mit den Zehnern. Da keine vorhanden sind, so gehe ich zu den Hunderten, und multipliziere 3148 erst mit 2 Einern, und nehme dann dieses Produkt 100 mal. Weil dies aber schon dadurch geschieht, daß ich die Zahlen 2 Stellen weiter nach links rücke, so fange ich das Produkt der Hunderter in der dritten Stelle an. Das Produkt der Hunderter ist 6296,00—629,600. Ich finde das Gesammtprodukt, wenn ich das Produkt der Einer und Hunderter zusammenzähle.

Das Produkt 657,932 ist als das Ganze anzusehen, von dem ich den Teil 3148 209mal genommen habe.

Der Multiplikandus 3148 aber und der Multiplikator 209 sind als die Faktoren des Produktes 657,932 zu betrachten.

3148
209
28332
6296
657932

Man erwähne noch, daß man die kleinere Zahl als Multiplikator setzt, obschon es gleich viel ist, wie man die Faktoren folgen läßt. Ist a × b = c, so ist auch b × a = c.

312 (a)
113 (b)
936
312
312
35256 (c)

113 (b)
312 (a)
226
113
339
35256 (c)

Mache ich einen Faktor kleiner, so muß ich den andern um ebenso viel vergrößern, wenn das Produkt sich gleich bleiben soll. 4 × 8 = 32. Nehme ich statt 4 die Hälfte, so muß ich den anderu Faktor 8 verdoppeln, um das Produkt 32 zu erhalten. (2 × 16).

Es kann hier darauf hingewiesen werden, wie vorteilhaft es in manchen Fällen ist, den Multiplikator 5 zu verdoppeln und den Multiplikandus zu halbieren, also: statt 5×42 zu rechnen 10×21, statt $5 \times 28 = 10 \times 14$. Ungerade Zahlen lassen sich leicht auf gerade zurückführen.

Fünfte Stufe.

Das Dividieren.

Mündlich und schriftlich.

A. Ohne Rest.

1) Der Divisor einstellig:

aa. Der Quotient unverändert.

a. Der Dividendus ebenfalls einstellig.

3 Einer sind in 6 Einern 2 mal (3 : 6 = 2)*).
$5 \times 169 = 10 \times 84\ (840) + 5 - 1\ (845)$.
3 Zehner sind 6 Z. 2 mal (30 : 60 = 2).
3 Hunderter sind 6 H. 2 mal (300 : 600 = 2).
2c.

b. Der Dividendus zweistellig.

3 Einer in 18 Einern 6 mal (3 : 18 = 6).
3 Zehner in 18 Z. 6 mal (30 : 180 = 6).
3 Hunderter in 18 H. 6 mal (300 : 1800 = 6).
2c.

c. Der Dividendus dreistellig.

3 Einer in 186 E. 62 mal (3 : 186 = 62).

---

*) Wir wechseln, wie schon im ersten Kursus geschah, mit dem Begriff des „Enthaltenseins" und „Teilens" ab, wie es die allseitige Betrachtung der Zahl fordert. Der Unterschied beider Begriffe besteht bekanntlich darin, daß beim „Teilen" eine Zahl gesucht wird, die der so vielte Teil vom Dividendus ist, als der Divisor anzeigt. Demnach heißt 3 : 12 = Welche Zahl ist der 3te Teil von 12? = Welche Zahl ist 3 mal in 12 enthalten? = Welche Zahl muß ich 3 mal nehmen, um 12 zu bekommen? Antwort: 4, denn $12 = 3 \times 4$. — Beim „Enthaltensein" aber soll angegeben werden, wie vielmal ich den Divisor nehmen muß, um den Dividendus zu bekommen. Demnach heißt 3 : 12 = Wie oftmal steckt 3 in 12? = Wie vielmal muß ich 3 setzen, um 12 zu bekommen? = Wie vielmal kann ich 3 von 12 wegnehmen? Antwort: 4 mal, denn $12 = 4 \times 3$. Demnach ist dort 3 : 12 = 4, weil $3 \times 4 = 12$, hier 3 : 12 = 4 mal, weil $4 \times 3 = 12$. Weil aber beides unmittelbar zusammenhängt, wie sich das sogleich ergiebt, wenn man das angeführte Beispiel in Punkten veranschaulicht:

so würde die Anschauung des Teilverhältnisses einseitig, wenn man beide Begriffe isolieren wollte.

3 Zehner in 186 Z. 62 mal (30 : 1860 = 62).
3 Hunderter in 186 H. 62 mal (300 : 18600 = 62).
ꝛc.

bb. Der Quotient nach dem Zehnergesetz wachsend.

a. Der dritte Teil von 6 Einern sind 2 E. (3 : 6 = 2).
Der dritte Teil von 6 Zehnern sind 2 Z. (3 : 60 = 20).
ꝛc.

b. Der dritte Teil von 18 Einern sind 6 E. (3 : 18 = 6).
Der dritte Teil von 18 Zehn. sind 6 Z. (3 : 180 = 60).
ꝛc.

c. $\frac{1}{3}$ × 186 Einer = 62 E. (3 : 186 = 62).
$\frac{1}{3}$ × 186 Zehner = 62 Z. (3 : 1860 = 620).
ꝛc.

2) Der Divisor zweistellig:

aa. Der Quotient derselbe.

a. Der Dividendus auch zweistellig.

18 Einer in 54 E. 3 mal (18 : 54 = 3).
18 Zehner in 54 Z. 3 mal (180 : 540 = 3).
ꝛc.

b. Der Dividendus dreistellig.

18 Einer in 108 E. 6 mal (18 : 108 = 6).
18 Zehner in 108 Z. 6 mal (180 : 1080 = 6).
ꝛc.

bb. Der Quotient wachsend.

a. $\frac{1}{18}$ × 54 E. (der 18te Teil von 54 Einern) = 3 Einer (18 : 54 = 3).
$\frac{1}{18}$ × 54 Zehner = 3 Z. (18 : 540 = 30).
$\frac{1}{18}$ × 54 Hunderter = 3 H. (18 : 5400 = 300).
ꝛc.

b. $\frac{1}{18}$ × 108 Einer = 6 E. (18 : 108 = 6).
$\frac{1}{18}$ × 108 Zehner = 6 Z. (18 : 1080 = 60).
ꝛc.

3) Der Divisor dreistellig:

aa. Quotient gleich.

a. Der Dividendus dreistellig.

114 Einer in 342 E. 3 mal (114 : 342 = 3).
114 Zehner in 342 Z. 3 mal (1140 : 3420 = 3).
ꝛc.

b. Der Dividendus vierstellig.

506 Einer in 1012 E. 2 mal (506 : 1012 = 2).
506 Zehner in 1012 Z. 2 mal (5090 : 10120 = 2).

bb. Der Quotient wachsend.

a. $\frac{1}{114} \times 342$ Einer $= 3$ E. $(114 : 342 = 3)$.
$\frac{1}{114} \times 342$ Zehner $= 3$ Z. $(114 : 3420 = 30)$.
$\frac{1}{114} \times 342$ Hunderter $= 3$ H. $(114 : 34200 = 300)$.

b. $\frac{1}{506} \times 1012$ Einer $= 2$ E. $(506 : 1012 = 2)$.
$\frac{1}{506} \times 1012$ Zehner $= 2$ Z. $(506 : 10120 = 20)$.

B. Mit Rest.

1) Der Divisor einstellig.

aa. Quotient gleich.

a. Dividendus auch einstellig.

3 Einer in 7 Einer 2 mal mit dem Rest von 1 E. $(3 : 7 = 2\ [1])$.
3 Zehner in 7 Zehner 2 mal mit dem Rest von 1 Zehner $(30 : 70 = 2\ [10])$.
3 Hunderter in 7 Hunderter 2 mal mit dem Rest von 1 H. $(300 : 700 = 2\ [100])$.

b. Dividendus zweistellig.

3 Einer in 25 E. 8 mal mit dem Reste von 1 E. $(3 : 25 = 8\ [1])$.
3 Zehner in 25 Zehner 8 mal mit dem Reste von 1 Zehner $(30 : 250 = 8\ [10])$.

2c.

Der Lehrer wird diese Übungen leicht nach A. fortführen können.
Hierauf Exempel für das Schnellrechnen, z. B.:
$\frac{1}{16} \times 48$ wie oft in 120?
$\frac{1}{509} \times 1018$ geteilt durch 2 ist welcher Teil von 100?
$\frac{1}{4} \times 9600$ geteilt durch 2 steckt wie oft in 96 Hunderten?
800 in 8000, den Quotient 3 mal, die Hälfte — 16 mal ist das Wievielfache von 12?
$3 \times 120 : 6 \times 5 : 15 \times 4 : 16$?
18 : 55, den Rest 9 mal, wie oft in 5409? u. a. m.

Schema für das schriftliche Dividieren.

A. Ohne Rest.

1) Divisor einstellig.

a. Dividendus ohne Nullen.

$$3 : 15936 = 3 : 15000 + 900 + 30 + 6.$$
$$3 : 15000 = 5000$$
$$3 : \quad 900 = \quad 300$$
$$3 : \quad 30 = \quad 10$$
$$3 : \quad 6 = \quad 2$$
$$3 : 15936 = 5312.$$

Kürzer:

```
3 : 15936 = 5000
    15000    300
    -----    ---
      936     10
      900      2
    -----    ----
       36   5312
       30
    -----
        6
        6
    -----
```

Kürzer:

```
3 : 15936 = 5...
   15...     3..
   -----     ---
     9..      1.
     9..       2
   -----    -----
      3.    5312
      3.
   -----
        6
        6
   -----
```

oder:

```
3 : 15936 | 5312
    15...
    -----
      9..
      9..
    -----
       3.
       3.
    -----
        6
        6
    -----
```

15936 das Ganze

3) 5312 der Teil

Am kürzesten:

oder in Bruchform:

$$\frac{15936}{3} = 5312.$$

```
6 : 49686 | 8...
    48000   2..
    -----   ---
     1686    8.
     1200     1
    -----   ----
      486   8281
      480
    -----
        6
        6
    -----
```

oder

```
6 : 49686 | 8281
    48...
    -----
     16..
     12..
    -----
      48.
      48.
    -----
        6
        6
    -----
```

in Bruchform: $\frac{49686}{6} = 8281$

b. Der Dividendus mit Nullen.

```
8 : 650 048 | 80000
    640 000    1000
    -------    ----
     10 048     200
      8 000      50
    -------    -----
      2.084       6
      1 600   81256
    -------
        448
        400
    -------
         48
         48
    -------
```

Ich ſuche zuerſt den 8ten Teil von 65 Zehntauſendern — ſind 8 Zehnt. 8 mal 8 Zehnt. ſind 64 Zehnt., 64 Zehnt. von 65 Zehnt. weggenommen, bleibt 1. Zehnt. = 10 Tauſ. Der 8te Teil von 10 T. iſt 1 T. ꝛc.

8 : 650048 | 81256
64....
10...
8...
20..
16..
44.
40.
48
48

Wie viel iſt der 8te Teil von 664800?

8 : 664800 | 83100
64....
24...
24...
8..
8..
00

c. Der Diviſor ebenfalls mit Nullen.

10 : 664800 = 10 : 600,000 + 60,000 + 4000 + 800.

10 : 60000|0 = 60000
10 : 6000|0 = 6000
10 : 400|0 = 400
10 : 80|0 = 80
10 : 66480|0 = 66480.

„So viel Nullen von einer Zahl weggenommen werden, um ſo viel mal wird ſie durch 10 dividiert, denn ſie kommt um ſo viel mal in eine niedere Ordnung.“

80 : 664800 | 8310
64...
24..
24..
8.
8.
0
0

100 : 664800 = 6648

800 : 664800 | 831 = $\frac{664800}{800} = 831$
64..
24.
24.
8
8

B. Mit Rest.

a. (Wie bei A.) 7 : 59634

$59634 = 59000 + 600 + 30 + 4.$

7 : 59000 = 8000
56000
3000
+ 600
7 : 3600 = 500
3500
100
+ 30
7 : 130 = 10
70
60
+ 4
7 : 64 =
63 9
7 : 1 = ⅐

} = 8519⅐

7 : 59634 | 8519⅐
56...
36..
35..
13.
7.
64
63
1

Oder: $\frac{59934}{7} = 8519\frac{1}{7}$

b. 9 : 735040 | 8167⅑
72....
15...
9...
60..
54..
64.
63.
10
9
⅑

$\frac{735040}{9} = 8167\frac{1}{9}$

c. 90 : 735040 | $8167\frac{1}{9}$

72...
15..
9..
60.
54.
64
63
1

$$\frac{735040}{90} = \frac{73504}{9} = 8167\frac{1}{9}$$

$$900 : 735040 = \frac{73504}{9}$$

$$9000 : 7350400 = \frac{73504}{90} = 816\frac{64}{90}$$

90 : 735 04 | $816\frac{64}{90}$
720 00 ...
15 04
9 00
6.04
5 40
64

In der angedeuteten Stufenfolge kann nun der Lehrer leicht die Übungen weiter führen, darauf haltend, daß der Schüler sich stets klar und schnell über seine Operation ausspreche.

Begriff des Dividierens.

Der Lehrer knüpft an das Multiplizieren an. Wie findet man das Dreifache von 1260?

Wenn man 1260 3 mal nimmt.

Thue das!

1260 a
3 b
3780 c

Wenn du a, b und c vergleichst, was ist
c? (Das Ganze.)
a? (Ein Teil vom Ganzen.)
b? (Die Zahl, welche mir sagt ꝛc.)

Setze a als unbekannt und zu finden.

Ich finde a, wenn ich mit b in c dividiere.

Thue das!

(b) (c) (a)
3 : 3780 | 1260
3...
7..
6..
18.
18.
0

„Das Ganze heißt der Dividendus oder die zu teilende Zahl; die Zahl, mit welcher ich das Ganze teile, um den unbekannten Teil desselben zu finden, der Divisor oder Teiler, und der gesuchte Teil Quotient. Also

c = Dividendus,
b = Divisor,
a = Quotient."

Wie heißen a und b, insofern ich durch ihre Multiplikation das Ganze bekomme?

Faktoren.

Was ist mir also in einem Divisionsexempel gegeben?

Das Ganze (Produkt) und ein Faktor.

Was soll ich finden?

Den andern Faktor.

Wie geschieht das?

Wenn ich mit dem bekannten Faktor das Produkt teile.

Wenn a der bekannte Faktor ist, wie findest du b?

Wenn ich mit a in c teile.

Thue das!

1260 : 3780 | 3
3780

Wie oft steckt also der Quotient im Dividend?

3 mal.

Welche Zahl sagt mir das?

Der Divisor.

Wie oft muß ich also a von c wegnehmen können:

So viel mal wie b anzeigt.

Thue das!

37 80
12 60
25.20
12 60
12 60
12 60

Demnach würde der Schüler über eine Aufgabe, wie die obige:

Welche Zahl steckt 3 mal in 3780?

sich also auszusprechen im Stande sein müssen:

„Die Zahl, welche 3 mal in 3780 steckt, muß der 3te Teil von 3780 sein. Ich finde den 3ten Teil von 3780, wenn ich mit 3 in 3780 dividiere. Der Divisor 3 ist als der bekannte Faktor zu betrachten, der Dividendus 3780 als das Produkt, und der Quotient ist der unbekannte Faktor, welcher eben gefunden wird, wenn ich mit dem bekannten Faktor das Produkt teile.

3780 = 37 Hunderter und 8 Zehner. Der 3te Teil von 37 H. = 12 H. mit dem Reste von 1 H.; dazu kommen 8 Z., macht 18 Z.;

der 3te Teil von 18 Z. = 6 Z., alſo iſt der 3te Teil von 3780 = 12 H. + 6 Z. = 1260 E. Der Quotient 1260 iſt alſo die Zahl, welche 3 mal in 3780 ſteckt. Darum muß ſich auch 1260 3 mal von 3780 abziehen laſſen."

A. Rechnen mit benannten Zahlen.

Es bedarf hierzu keiner beſonderen Anleitung mehr, weder für den Lehrer, welcher in einem guten Exempelbuche den methodiſch geordneten Stoff vor ſich hat, noch für den Schüler, der die ihm vorgelegten Aufgaben ohne alle Schwierigkeit rechnet. Nur darauf möchte hier hinzuweiſen ſein, daß der Lehrer fortwährend neben der Fertigkeit in der Operation auch die Allſeitigkeit der Anſchauung im Auge behalte, und auf jeder Stufe immer erſt einige Aufgaben mündlich recht tüchtig durcharbeite, und zum fertigen ſprachlichen Ausdrucke bringe, ehe das Tafelrechnen eintritt. Es können recht füglich die Tafelrechen-Exempel in kleineren Zahlen ausgedrückt vorher als Kopfrechnen-Exempel durchgerechnet werden.

Wir geben hier als Maßſtab des Geforderten einige mehrſeitig behandelte Aufgaben.

1. Addieren.

Wie viel Glockenſchläge thut die Stadtuhr in 24 Stunden?*)

(Vergl. S. 88.)

a. Was iſt dir in dem Exempel gegeben?

Die Zeit, in welcher die Glockenſchläge geſchehen, nämlich 24 Stunden.

Was weißt du von den Glockenſchlägen der Uhr?

Die Uhr ſchlägt in der erſten Stunde 1-, in der zweiten 2 mal, u. ſ. f. bis 12; dann fängt ſie wieder an 1 mal zu ſchlagen u. ſ. f. bis wieder 12.

b. Wonach iſt gefragt?

Nach der Anzahl der Glockenſchläge, welche die Uhr in 24 Stunden thut.

Weil die Uhr nur bis 12 ſchlägt, ſo wirſt du erſt was berechnen?

Die Anzahl der Glockenſchläge in 12 Stunden.

Und wie findeſt du daraus die Anzahl der Glockenſchläge in 24 Stunden?

Wenn ich die Summe der Glockenſchläge in 12 Stunden 2 mal nehme.

c. Wie viel beträgt die Anzahl der Glockenſchläge in 12 Stunden?

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78 Schläge.

Wie viel beträgt ꝛc. in 24 Stunden?

2 × 78 = 156 Schläge.

1) Wie verhält ſich die Anzahl der Glockenſchläge von 24 Stunden zu den von 12 Stunden?

*) Vergl. Dieſterweg und Heuſer, praktiſches Rechenbuch für Elementar- und höhere Bürgerſchulen, 12. Auflage S. 18.

2) Wie viel beträgt der Unterschied der Glockenschläge der ersten 11 Stunden von denen der zwölften Stunde?

3) Wie viel Glockenschläge hat die Uhr nach der 15ten Stunde gethan?

$78 + 1 + 2 + 3 = 84$ Schläge.

2. Subtrahieren.

Das Vermögen eines Mannes bestand vor einem Brande in 34580 Mark, und nach demselben in 6594 Mark. Wie viel hatte er durch das Brandunglück verloren?*)

a. Woraus siehst du schon, daß der Mann durch das Brandunglück verloren hat?

Daraus, daß er vor dem Brande mehr Geld hatte, als nach dem Brande.

Wie viel hätte er nach dem Brande im Vermögen haben müssen, wenn er sagen wollte, er habe nichts verloren?

Er hätte nach dem Brande auch 34580 Mark haben müssen.

Wie viel hatte er aber bloß?

Er hatte bloß noch 6594 Mark.

b. Was wird er seinen Verlust nennen, wenn er sein Geld nach dem Brande zählte, und bloß 6594 Mark herausbekam?

Das was ihm von dieser Summe an den 34580 Mark fehlte.

Wonach ist gefragt?

Wie viel ꝛc. kannst du das nach deiner früheren Antwort ausdrücken?

Wie viel mußte der Mann noch zu den 6594 Mark zählen, um 34580 Mark zu bekommen?

c. Wie findest du das?

Wenn ich von 6594 Mark bis zu 34580 Mark hinaufzähle — oder wenn ich von 34580 Mark 6594 Mark abziehe.

Thue das Erstere!

6594 sind 65 Hunderter und 94 Einer, ich mache das 66ste Hundert voll, indem ich zu 94 noch 6 E. zähle. Da $34580 = 345$ H. $+ 80$ E., so muß ich zu 66 H. noch $34 + 245$ H. $+ 80$ E. haben; $34 + 245 = 279$ H., zu den 80 E. kommen noch jene 6 E. $= 86$ E. Also muß ich zu 6594 noch 279 H. $+ 86$ E. $= 27986$ zählen, um ꝛc. Also hatte der Mann 27986 Mark verloren.

1) Wie kannst du den Verlust des Mannes durch die im Exempel gegebenen Zahlen ausdrücken?

Der Mann hatte 34580 — 6594 Mark verloren.

Oder der Verlust war gleich welchem Unterschiede?

Gleich dem Unterschiede des früheren und späteren Vermögens.

2) Bezeichne auf ähnliche Weise die Summe, welche er mehr verloren hatte, als das übrig gebliebene Vermögen betrug.

3) Setze den Verlust als bekannt, das spätere Vermögen als unbekannt. Wie lautet nun die Aufgabe?

Das Vermögen eines Mannes vor einem Brande bestand in

*) Prakt. Rechenbuch ꝛc. S. 21.

34580 Mark. Durch das Brandunglück verlor er 27986 Mark? Wie viel hatte er nun noch im Vermögen?

Wie berechneſt du das?

4) Setze auf ähnliche Weiſe den Betrag des erſten Vermögens als unbekannt!

3. Multiplizieren.

Ein Kaufmann kauft 3900 Centner Waare zu 36 Mark, und verkauft die Waare wieder, den Centner zu 42 Mark. Wie viel gewann er bei dieſem Handel?*)

a. Was iſt von dem Kaufmann geſagt?

Er kaufte 3900 Centner zu 36 Mark.

Was heißt das „zu"?

Ein Ctr. koſtete 36 Mark.

Was iſt ferner geſagt?

Er verkaufte 1 Ctr. zu 42 Mark.

Welches iſt der alſo Einkaufspreis für 1 Ctr., und welches der Verkaufspreis?

b. Was findeſt du, wenn du beide Preiſe mit einander vergleichſt?

Der Verkaufspreis beträgt mehr als der Einkaufspreis.

Wie nennt der Kaufmann das, was er im Verkauf mehr bekommt?

Seinen Gewinn.

Wie viel beträgt hier der Gewinn auf 1 Ctr.?

6 Mark.

Wie findeſt du das?

Wenn ich den Einkaufspreis von dem Verkaufspreiſe abziehe.

Was iſt aber in der Aufgabe gefragt?

Wie viel er in dem Handel gewann.

Das heißt an wie viel Centnern?

An 3900 Centnern.

Was weißt du ſchon von dem Gewinn des Kaufmanns?

Daß er an 1 Ctr. 6 Mark gewonnen hat.

Wie findeſt du nun den ganzen Gewinn?

Wenn ich 3900×6 nehme.

Thue das!

$3900 \times 6 = 6 \times 3900 = 6 \times 39$ H. $= 6 \times 30$ H $+ 6 \times 9$ H. $=$ 180 H. $+ 54$ H. $= 23400$. Alſo ꝛc.

1) Wie viel betrug die ganze Einkaufsſumme?

Wie viel der ganze Verkauf? Was war alſo der ganze Gewinn?

2) Setze den Gewiun an 1 Ctr. als bekannt, den Preis des Verkaufs als unbekannt. (a) — oder den Preis des Einkaufs als unbekannt

*) S. a. a. O. S. 25.

(b) oder den ganzen Gewinn, nebst dem Einkaufs- und Verkaufspreise als bekannt, und die Anzahl der Ctr. als unbekannt (c) — welche Aufgaben entstehen daraus?

3) Wenn der Kaufmann nur 11700 Mark gewonnen hätte, wie teuer hätte er da den Ctr. verkauft?

Wenn er an 3900 Ctr. 11700 Mark gewann, so gewann er an 1 Ctr. den 3900sten Teil von 11700 Mark $= \frac{1}{3900} \times 117$ (dem 39sten Teile von 117) $= 3$ Mark. Da er 1 Ctr. zu 36 Mark einkaufte, so mußte er ihn zu $36 + 3 = 39$ Mark verkaufen.

4. Dividieren.

Ein Gärtner arbeitete eine Woche in einem Garten, und erhielt dafür 12 Mark 36 Pf.; wie viel war sein Tagelohn?*)

a. Gegeben ist mir die Arbeitszeit = 6 Tage, und das Arbeitslohn = 12 Mark 36 Pf.

b. Es soll gesucht werden das Tagelohn, oder das Arbeitslohn für 1 Tag.

c. Wer in 6 Tagen 12 Mark 36 Pf. verdient, verdient in einem Tage den 6ten Teil von 12 Mark 36 Pf. Der 6te Teil von 12 Mark = 2 Mark, von 36 Pf. = 6 Pf. also verdient er in 1 Tag 2 Mark 6 Pf.

1) Ein Gärtner erhält zum Tagelohn 2 Mark 6 Pf. wie viel in der Woche zu 6 Arbeitstagen?**)

2) Derselbe Gärtner hatte sich mit seiner Aushülfe, die ihm täglich 2 Mark 6 Pf. einbrachte, 24 Mark 72 Pf. verdient. Wie viel Tage hatte er in dem Garten gearbeitet?

2 Mark 6 Pf. sind in 24 Mark 72 Pf. 12 mal enthalten, also hatte der Gärtner 12 Tage gearbeitet.

5. Gemischte Aufgaben.

2) Zwei Kaufleute, A. und B., vergleichen ihren Gewinn bei einem Meßhandel. B. sagt zu A.: Die Hälfte deines Gewinnes ist das Drittel des meinigen. A. hatte 605 Thaler gewonnen; wie viel B.?

a. Was weißt du von dem Gewinne des A.?
Er beträgt 605 Thlr.

Was weißt du von dem Gewinne des B.?
Es ist der dritte Teil des Gewinnes von B. gleich der Hälfte des Gewinnes von A.

b. Wenn ich den dritten Teil des Gewinnes von B. wüßte, was könnte ich da leicht finden?
Den ganzen Gewinn von B.

---

*) a. a. O. S. 44.
**) Der Schüler wird angeleitet, diese Variationen überall selbst zu bilden.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Wie viel betrüge der ganze Gewinn von B.?

Dreimal das Drittel.

Es ist uns aber gesagt, daß welche Summe gleich sei dem Drittel des Gewinnes von B.?

Die Hälfte des Gewinnes von A.

Wie viel beträgt diese?

$\frac{605}{2}$ Thlr. = 302 Thlr. 15 Sgr.

c. Wie groß ist also der Gewinn des B.?

3 × 302 Thlr. 15 Sgr. = 907 Thlr. 15 Sgr.

1) B. hatte auf der Messe 907½ Thlr. gewonnen; A. sagte: das Drittel deines Gewinnes ist gleich der Hälfte des meinigen. Wie viel betrug der Gewinn des A.?

2) Zwei Kaufleute verglichen ihren Gewinn, und es fand sich, daß der Gewinn von B. noch um die Hälfte des Gewinnes von A. größer war. Dieser hatte 605 Thaler gewonnen, wie viel jener?

Der Gewinn des B. = 605 Thlr. + $\frac{605}{2}$ Thlr. = 605 Thlr. + 302 Thlr. 15 Sgr. = 907 Thlr. 15 Sgr.

3) Zwei Kaufleute ꝛc., und es fand sich, daß A. den dritten Teil des Gewinnes von B. weniger gewonnen hatte als B., dessen Gewinn 907½ Thaler betrug.

4) Zwei Kaufleute ꝛc. Das, was A. zweimal gewonnen hatte, hatte B. dreimal gewonnen, dessen Gewinn 907½ Thlr war.

5) A. und B. vergleichen ihren Gewinn; ⅔ des Gewinnes von B. sind gleich dem ganzen Gewinne von A. B. aber hatte 907½ Thlr. gewonnen. Wie viel A.?

Gewinn von A. = ⅔ × 907½ Thlr. 1 mal der 3te Teil von 907 Thlrn. = 302 Thlr. mit dem Reste von 1 Thlr., dazu der halbe Thaler, bleiben noch 45 Sgr. durch 3 zu teilen. Der dritte Teil von 45 Sgr. = 15 Sgr. Also ⅓ × 907½ Thlr. = 302 Thlr. 15 Sgr., folglich ⅔ × 907½ Thlr. = 2 × 302 Thlr. 15 Sgr. = 605 Thlr. = dem Gewinne des A.

2) Drei Personen teilen sich in 4 Centner 20 Kilogramm so, das A. 15 Kilo und B. 10 Kilo mehr nimmt als C. Wie viel bekommt Jeder?

Das, was A. und B. mehr nehmen, wollen wir gleich abziehen. Es beträgt 15 Kilo und 10 Kilo = 25 Kilo oder ein halber Centner. Dieser, von 4 Centner weggenommen, läßt 3½ Centner oder 3 Centner 25 Kilo. Dazu kommen die 20 Kilo, macht 3 Centner 45 Kilo. Diese werden in 3 gleiche Teile geteilt. Der 3te Teil von 3 Centner ist 1 Centner, der dritte Teil von 45 Kilo 15 Kilo. C. bekommt also 1 Centner 15 Kilo; B. 10 Kilo mehr, macht 1 Centner 25 Kilo, und A. 15 Kilo mehr, macht 1 Centner 30 Kilo.

1) Drei Personen haben sich in eine Waare dergestalt geteilt, daß A. 5 Pfd. mehr bekommen hat, als B., und A. 10 Pfd. mehr als C. Der Anteil von B. betrug 155 Pfd. Wie viel der ganze Vorrat?

B. hat 155 Pfd. bekommen, also empfing A. 155 Pfd. + 5 Pfd. = 160 Pfd., und da C. 10 Pfd. weniger bekam, als B., so kam auf C. 155 Pfd. — 10 Pfd. = 145 Pfd. Der ganze Vorrat betrug also 160 Pfd. + 155 Pfd. + 145 Pfd. = 460 Pfd. = 220 Kilo = 4 Centner 20 Kilo.

2) Drei Personen haben sich in 4 Ctr. 20 Kilo so geteilt, daß A. 5 Kilo mehr erhalten hat, als B., und C. 10 Kilo weniger, als B. Wie groß ist der Anteil eines Jeden?

Erhielt C. 10 Kilo weniger, als B., so erhielt A. 15 Kilo mehr, als C., und B. 10 Kilo mehr, als C. Das, was A. und B. mehr bekamen, als C, war also 25 Kilo ꝛc.

Eine dem vorstehenden Exempel nachgebildete Aufgabe würde sein:

An einem Baue arbeiten 12 Arbeiter — 4 Zimmerleute und 8 Maurer. Die Zimmerleute bekommen jeder täglich 40 Pf. mehr, als die Maurer. Das Tagelohn aller Arbeiter beträgt 36 Mark. Wie viel bekommt ein Zimmermann und wie viel ein Maurer?

Das, was die Zimmerleute mehr bekommen, ist 4×40 Pf. $= 1$ Mark 60 Pf. Das nehmen sie erst weg, und teilen sich dann mit den Maurern zu gleichen Teilen.

3) N. kaufte sich Tuch zu einem neuen Rocke, wovon die Elle $4\frac{1}{2}$ Gulden kostete. Er bezahlte im Ganzen 12 Thlr., wie viel Ellen hatte er zu seinem Rocke genommen?

c. Was ist dir bekannt?

Der Preis von 1 Elle.

Was ist dir ferner gegeben?

Der Preis aller Ellen.

Was kennst du aber nicht?

Die Anzahl der Ellen.

Du weißt aber, daß N. wie oft vom Kaufmann eine Elle nehmen konnte?

So oft er ihm $4\frac{1}{2}$ Gulden hinlegte.

b. Wie viel Ellen konnte also N. für sein Geld verlangen?

So viel Ellen als er $4\frac{1}{2}$ Gulden hatte.

Wie viel Geld hatte er?

12 Thaler.

c. Wie findest du also aus dem Preise einer Elle und der ganzen Summe die Anzahl der Ellen?

Wenn ich mit dem Preise von 1 Elle, nämlich $4\frac{1}{2}$ Gulden, in die ganze Summe, nämlich 12 Thlr., dividiree.

Thue das!

$4\frac{1}{2}$ Gulden $= (4 \times 20) + 10$ Sgr. $= 90$ Sgr. $= 3$ Thaler. 3 Thaler stecken in 12 Thalern 4 mal.

Daraus folgt?

Es folgt daraus, daß N. 4 Ellen kaufte.

1) N. nahm Tuch zu einem Rocke, und bezahlte für die Elle $4\frac{1}{2}$ Gulden. Wie viel Thaler bezahlte er dem Kaufmann, wenn er 4 Ellen von ihm nahm?

2) In welchem Verhältnisse steht die Anzahl der Ellen zu dem Preise von 1 Elle, und die Anzahl der Ellen zu dem ganzen Preise?

3) N. nahm sich (zu einem Rocke) beim Kaufmann 4 Ellen Tuch, und bezahlte dasselbe mit 12 Thalern. Welches war der Preis von 1 Elle.

4) B. nahm von derſelben Sorte Tuch, brauchte aber $4\frac{1}{4}$ Ellen. Wie viel mußte der bezahlen?

a. Wann hätte er eben ſo viel als A. bezahlt?

Wenn er bloß 4 Ellen genommen hätte.

Wie viel hätte er da auch dem Kaufmann gegeben?

$4 \times 4\frac{1}{4}$ Gulden $= 12$ Thaler.

Wie viel mußte er ihm nun aber mehr bezahlen als A.?

Das, was die Viertel-Elle koſtete.

b. Wie viel bezahlte er alſo überhaupt dem Kaufmann?

$4 \times 4\frac{1}{4}$ Gulden, und $\frac{1}{4} \times 4\frac{1}{4}$ Gulden. $4 \times 4\frac{1}{4}$ Gulden $= 12$ Thaler, $\frac{1}{4} \times 4$ Gulden $= 1$ G., $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ G. $= \frac{1}{4} \times 8$ gGr. $= 2$ gGr. $= 2$ Sgr. 6 Pf., 1 G. $+$ 2 Sgr. 6 Pf. $= 22$ Sgr. 6 Pf. Alſo bezahlte B. 12 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf.

Wenn der Lehrer auf dieſe Weiſe durch langſames (gründliches) Durcharbeiten einiger Aufgaben das Bewußtſein des Schülers bildet, dann bedarf es auch keiner ſo großen Maſſe von Aufgaben für das Schnellrechnen. Fertigkeit und Schnelligkeit im Orientieren iſt nie ohne vorhergegangene allſeitige Übung der Anſchauung zu erlangen. Eine einzige Aufgabe, mit Verſtand aufgelöſt, hat mehr Wert als ein Dutzend anderer mechaniſch hintereinander gerechnet, und mit deren Löſung es alsbald ſtocken würde, wenn man die Bedingungen der Aufgabe etwas vom Schema abweichend geſtaltete. Die in manchen Schulen, beſonders bei Gelegenheit der Prüfungen, zur Schau geſtellte Fertigkeit im Schnellrechnen iſt oft bloß Schein und Blendwerk, eingeſchulter Mechanismus in einer bekannten Form, der verſchwindet, ſobald dieſe „Form" aufgehoben wird.

Dritter Kurſus.

Das Rechnen mit Brüchen.

Viertes Jahr.

Erſtes Semeſter.

Allſeitige Anſchauung des Bruches.

(Denkrechnen.)

(Vorbemerkungen.)

1) Wie der Schüler zur Anſchauung der ganzen Zahlen gelangte, indem er ſie auf die Eins zurückführte, d. h. ſie als Vielfache eines Einfachen erkannte, ſo werden ihm jetzt auch die Bruchzahlen anſchaulich gemacht durch ihre ſtete Beziehung auf die Einheit, aus der ſie entſtanden.

2) Während aber bisher die Eins als Teil der ganzen Zahlen erschien, wird sie nunmehr selbst als ein Ganzes, mithin als ein Vielfaches aufgefaßt, das in seine einfachen Bestandteile aufgelöst wird, welche wir eben mit Beziehung auf ihr Ganzes „Brüche" nennen.

3) Weil der Schüler bereits vom ersten Kursus an die ganzen Zahlen als Brüche zu behandeln gelernt hat, indem er sie als Teile eines Vielfachen erkannte, so wird die nun folgende Behandlung des eigentlichen Bruches (der gebrochenen Einheit) um so weniger Schwierigkeit für ihn haben, als der Prozeß ganz derselbe ist, durch welchen er in das Rechnen mit ganzen Zahlen eingeführt wurde, nämlich: Anschauung des Mannigfaltigen in seiner organischen Einheit.

4) Da die Verschiedenheit der Brüche bedingt ist durch ihre Größe, die Größe aber durch die Anzahl der gleichen Teile, in welche ich die Einheit zerfälle, so lassen sich diese verschiedenartigen Teilungen als besondere Ordnungen, und zwar als absteigend niedere Ordnungen betrachten, wie bei den ganzen Zahlen durch das Verzehnfachen der Einheit die aufsteigend höheren Ordnungen des Einers, Zehners, Hunderters ꝛc. sich bildeten. Jene verschiedenen Bruch-Einheiten bezeichnet die Sprache durch die Nachsilbe „tel", als Zweitel*), Drittel, Viertel ꝛc.

5) Demnach ist uns der Einteilungsgrund des für die Anschauung zu organisierenden Stoffes in diesem Kursus objektiv in der Verschiedenheit der Brüche selber gegeben, und wir behandeln auf der ersten Stufe die Halben, auf der zweiten die Drittel u. s. f., bis der Schüler durch diese organische Entwickelung seiner Anschauung zur Beobachtung des Bruches gelangt ist, wozu etwa 4 Stufen vollkommen ausreichen.

6) Da wir — wie in den früheren Kursen — mit der allseitigen Anschauung des Objektes beginnen, so üben wir auf jeder Stufe in der bekannten Weise mündliches und schriftliches, reines und angewandtes Rechnen, Addieren und Subtrahieren ꝛc. zusammen, und behandeln ganz dem bisherigen Gange analog den Bruch unter den Rubriken:

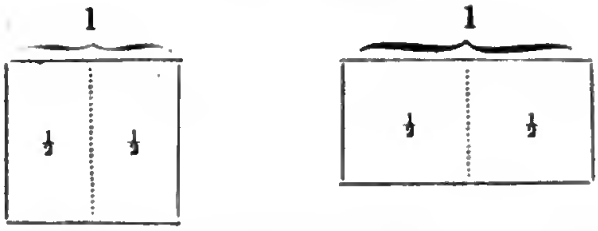
1) Anschauung der reinen Zahl.
   a. Messen,
   b. Vergleichen,
   c. Kombinieren.
2) Anwendung des reinen Zahlverhältnisses nach allen Spezies.

Erste Stufe.

Die Halben.

1)

*) Weil die Teilung eines Ganzen in 2 gleiche Teile die am meisten im Leben vorkommende ist, so hat die Sprache für diese Teile ein eigenes Wort gebildet, nämlich Halbe oder Hälften.



Wenn ich Eins (ein Ganzes) in zwei gleiche Teile zerlege*), so erhalte 2 Halbe (Hälften). Ein Halbes ist einer von den 2 gleichen Teilen, in die ich das Ganze geteilt habe.

$2:1 = \frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

a. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
b. $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $2 \times \frac{1}{2} = 1$.
c. $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
d. $\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$, $\frac{1}{2} : 1 = 2$ ($\frac{1}{2}$ in 1 steckt 2 mal).

Anwendung auf die Vielfachen.

α. Ist $2:1 = \frac{1}{2}$, so ist $2:2 = \frac{2}{2}$, $2:3 = \frac{3}{2}$, $2:10 = \frac{10}{2}$, $2:100 = \frac{100}{2}$ ꝛc.

aa. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ (anderthalb), $2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ (drittehalb), $3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ (viertehalb) ꝛc., $1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$, $2\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$, $12\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 13$ ꝛc., $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 3$ (denn $1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 + 1 = 3$, oder $1 + 1 = 2$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $2 + 1 = 3$), $5\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 7$ ꝛc., $7\frac{1}{2} + 8 = 15\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2} + 8\frac{1}{2} = 16$, $8 + 8\frac{1}{2} = 16\frac{1}{2}$.

bb. $2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$, $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, $10 \times \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5$, $100 \times \frac{1}{2} = \frac{100}{2} = 50$; $7 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$, $73 \times \frac{1}{2} = \frac{73}{2} = 36\frac{1}{2}$ ꝛc.

$1 \times 1\frac{1}{2} = 1 \times \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, $2 \times 1\frac{1}{2} = 2 \times \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$, $3 \times 1\frac{1}{2} = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ ꝛc. (oder: $3 \times 1 = 3$, $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, $3 \times 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$) ꝛc.

$6 \times 15\frac{1}{2} = 6 \times 15 + 6 \times \frac{1}{2}$ ꝛc. $9 \times 80\frac{1}{2}$ ꝛc.

Ist $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$, so ist

$\frac{1}{2} \times 6 = \frac{6}{2} = 3$, $\frac{1}{2} \times 9 = 4\frac{1}{2}$ ꝛc.

cc. $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ (denn $2 = 1 + 1$; $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$), $3 - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ (denn $3 = 2 + 1$; $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $2 + \frac{1}{2} =$

*) Bei der Entstehung des Bruches tritt der Begriff des „Teilens" ein, bei der Division mit Brüchen bleibt aber der Begriff des „Enthaltenseins" die elementare Basis, worauf alle übrige Darstellungsformen der Division zurückzuführen sind. Weil ich aber dort (beim Teilen des Ganzen in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile) die Einheit zu zerlegen habe, so ist klar, daß ich keine Zahl durch $\frac{1}{2}$ oder $\frac{2}{3}$ „teilen" kann, und daß es Unsinn wäre, die Aufgabe $\frac{3}{4} : 4$ aufzufassen, als: teile 4 durch $\frac{3}{4}$, oder welches ist der $\frac{3}{4}$ste Teil von 4? Ich muß vielmehr die andere Frage des Teilens hier substituieren: Von welcher Zahl ist vier 2 mal der dritte Teil? und weil ich zu dieser Frage nur durch die Reflexion auf meine Thätigkeit gelange, nachdem ich auf dem Wege der Anschauung erkannt habe, wie oft $\frac{3}{4}$ in 4 steckt, so ist klar, warum das Dividieren mit einem Bruche nur durch das Enthaltensein anschaulich zu lösen sei.

$2\frac{1}{2}$) ꝛc. $2-1\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (denn $2-1=1$, $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$), $6-4\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$ (denn $6-4=2$, $2-\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$), $9-3\frac{1}{2}$ ꝛc. $2\frac{1}{2}-1=1\frac{1}{2}$ ($=[2-1]+\frac{1}{2}$), $6\frac{1}{2}-3=3\frac{1}{2}$ ($=[6-3]+\frac{1}{2}$) ꝛc. $3\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}=1$ ($3-2=1$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$; oder: $3\frac{1}{2}-2=1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=1$) $8\frac{1}{2}-4\frac{1}{2}$? ꝛc.

dd. $\frac{1}{2}:1=2$ (denn $1=\frac{2}{2}$, $\frac{1}{2}:\frac{2}{2}=1:2=2$[mal]).

$\frac{1}{2}:4=8$ (denn $4=\frac{8}{2}$, $\frac{1}{2}:\frac{8}{2}$ ꝛc., oder $\frac{1}{2}:1=2$, $\frac{1}{2}:4=4\times 2=8$) ꝛc.

$\frac{1}{2}:1\frac{1}{2}=\frac{1}{2}:\frac{3}{2}=1:3=3$. $\frac{1}{2}:9\frac{1}{2}=19$ ꝛc.

$1\frac{1}{2}:6=\frac{3}{2}:\frac{12}{2}=3:12=4$.

$3\frac{1}{2}:10\frac{1}{2}=\frac{7}{2}:\frac{21}{2}=7:21=3$ ꝛc.

2) a. Vergleiche $\frac{1}{2}$ mit 1!

$\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$, $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}$ = der Hälfte von 1, 1 = dem Zweifachen von $\frac{1}{2}$.

b. Welche Zahl nennt mir den Unterschied von $\frac{1}{2}$ und 1?

Wie viel muß ich von 16 wegnehmen, um $9\frac{1}{2}$ zu bekommen?

Von 2 Zahlen heißt die eine $9\frac{1}{2}$, der Unterschied von der größeren ist $6\frac{1}{2}$, wie heißt die größere Zahl?

Nenne andere Zahlenpaare, welche $6\frac{1}{2}$ zum Unterschiede haben!

c. Wie oft muß ich $\frac{1}{2}$ nehmen, um 1 zu bekommen?

Wie oft $4\frac{1}{2}$, um 9 zu erhalten?

Von welcher Zahl ist $4\frac{1}{2}$ die Hälfte?

Von welcher Zahl ist 9 das Zweifache?

Der Divisor ist $4\frac{1}{2}$, der Quotient 2, wie heißt der Dividendus?

Der Quotient 2 sagt mir, daß $4\frac{1}{2}$ in der Fragezahl 2mal enthalten sei, also muß diese das Zweifache von $4\frac{1}{2}=9$ sein.

Welche Zahl muß ich $\frac{1}{2}$mal nehmen, um $4\frac{1}{2}$ zu bekommen?

3) a. Was heißt $\frac{1}{2}$ Mark, Schock ꝛc.?

$\frac{1}{2}$ Mark heißt eine von den 2 gleichen Teilen, in welche ich die ganze Mark zerlegt habe.

Da die ganze Mark in 100 Pfennig geteilt wird, so kommen auf die halbe Mark 50 Pf., $\frac{1}{2}$ Markstück kann darum auch als 50 Pfennig-Stück bezeichnet werden.

b. Wie viel sind 57 Pfennig in halbe Mark bezeichnet?

Da $\frac{1}{2}$ Mark = 50 Pf. und 57 = 50 Pf. + 7 Pf., so sind sie = $\frac{1}{2}$ Mark + 7 Pfennig.

c. Um wie viel ist das Achtfache von 57 Pfennig kleiner als das Neunfache von eben dieser Summe?

Das Achtfache von 57 Pf. $=8\times\frac{1}{2}$ Mark = 4 Mark + (8×7) Pf. = 56 Pf. = 4 Mark 56 Pf. Das Neunfache von 57 Pf. $=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$ Mark + (9×7) Pf. = 63 Pf.; da 63 Pf. = $\frac{1}{2}$ Mark + 13 Pf., so ist das Neunfache von 57 Pf. = 5 Mark 13 Pf. Um diese Summe zu erhalten, muß ich zu 4 Mark 56 Pf. noch 57 Pf. hinzuzählen. Also ist das Neunfache von 57 Pf. um 57 Pf. größer als das Achtfache derselben Summe.

d. In einer Wirtschaft wurden zu einem Gastmahle gekauft $17\frac{1}{2}$ Pfd., ferner $13\frac{1}{2}$ Pfd. + $8\frac{1}{2}$ Pfd. Fleisch. Wie viel Portionen konnten daraus gemacht werden, wenn auf 1 Portion 25 Neulot gerechnet wurden?

e. Wenn man für 1 Kilogramm ½ Mark bezahlt, so bekommt man für 25 Pfennig wie viel Pfund?

Da 25 Pfennig die Hälfte von ½ Mark oder 50 Pf., so kann man auch nur die Hälfte eines Kilogramm dafür erhalten, nämlich 1 Pfund.

f. Was kosten 10½ Meter Tuch, wenn man 5 Meter mit 21 Mark bezahlt?

Kosten 5 Meter 21 Mark, so kostet 1 Meter den 5ten Teil von 21 Mark = 4 Mark 20 Pf., ½ Meter kostet ½ × 4 Mark 20 Pf. = 2 Mark 10 Pf., also 10½ Meter = 21 Meter 21 × 2 Mark 10 Pf. = 42 Mark + 210 Pf. = 2 Mark 10 Pf., also zusammen 44 Mark 10 Pf.

Zweite Stufe.

Die Drittel.

1)

Wenn ich 1 in 3 gleiche Teile teile, so bekomme ich ⅓.
⅓ ist einer von den 3 gleichen Teilen, in welche ich 1 geteilt habe.
⅔ sind 2 von den 3 gleichen Teilen, in die ich 1 geteilt habe.

$3 : 1 = \frac{1}{3}$, oder: $\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$.

a. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

d. $1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

c. $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

b. $\frac{1}{3} : 1 = 3$, $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 2$, $\frac{1}{3} : \frac{1}{3} = 1$.

α. $3 : 1 = \frac{1}{3}$, $3 : 2 = \frac{3}{2}$, $3 : 10 = \frac{3}{10}$ ꝛc.

aa. $2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$, $8 + 4\frac{1}{3} = 12\frac{1}{3}$, $5\frac{1}{3} + 4\frac{1}{3} = 9\frac{2}{3}$, $17\frac{2}{3} + 17\frac{1}{3} = 35$, $17\frac{2}{3} + 17\frac{2}{3} = 35\frac{1}{3}$ ꝛc.

bb. $1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $9 \times \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3$, $14 \times \frac{1}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$ ꝛc.

$1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, $9 \times \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6$, $14 \times \frac{2}{3} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$, $10 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$ ꝛc.

$3 \times 1\frac{1}{3} = 4$ (oder $3 \times 1 + 3 \times \frac{1}{3}$, oder $3 \times 1\frac{1}{3} = 3 \times \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$), $9 \times 1\frac{1}{3} = 12$ ꝛc.

$3 \times 1\frac{2}{3} = 5$, $5 \times 1\frac{2}{3} = 8\frac{1}{3}$ ꝛc.

Ist $\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$, so ist $\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{3} \times 6 = \frac{6}{3} = 2$, $\frac{1}{3} \times 7 = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$.

$\frac{2}{3} \times 1$ (der dritte Teil von 1 zweimal genommen) $= \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3} \times 9 = \frac{18}{3} = 6$ ꝛc.

cc. $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$ ꝛc.

$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $2 - \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$ ꝛc.

$2 - 1\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ꝛc.

$7\frac{2}{3} - 4\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$ ꝛc.

$7\frac{1}{3} - 4\frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$ $(7 - 4\frac{2}{3}) + \frac{1}{3}$, oder $(7\frac{1}{3} - 4) - \frac{2}{3}$).

dd. $\frac{1}{3} : 1 = 3$, $\frac{1}{3} : 2 = 2 \times 3 = 6$, $\frac{1}{3} : 3 = 3 \times 3 = 9$ ꝛc.

$\frac{1}{3} : 14 = 42$ ($\frac{1}{3} : 1 = 3$, $\frac{1}{3} : 14 = 14 \times 3$).

$\frac{1}{3} : 1 = \frac{1}{3}$ ($\frac{1}{3} : 1 = 3$mal, $\frac{1}{3}$ in 1 die Hälfte von $3 = \frac{3}{2}$mal) $\frac{1}{3} : 6 = 9$ ($\frac{1}{3} : 6 = 18$, $\frac{1}{3} : 6 = \frac{1}{18} = 9$) ꝛc. Oder:

$\frac{1}{3} : 1 = \frac{1}{3} : \frac{3}{3} = 2 : 3 = \frac{2}{3}$ ꝛc.

$2\frac{1}{3} : 4\frac{2}{3} = 2$ ($\frac{7}{3} : \frac{14}{3} = 7 : 14 = 2$).

$6\frac{2}{3} : 20 = \frac{20}{3} : \frac{60}{3} = 20 : 60 = 3$ ꝛc.

2) a. Vergleiche $\frac{1}{2}$ mit 1!

$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

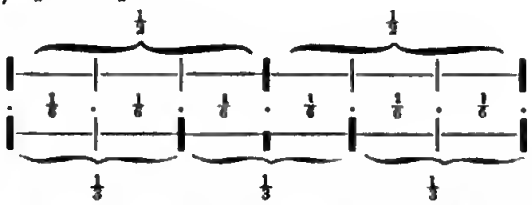
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1$, $1 = 3 \times \frac{1}{3}$.

Vergleiche $\frac{2}{3}$ mit 1!

$\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$, $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$.

$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times 1$, $1 = 1 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$.

b. Vergleiche $\frac{1}{3}$ mit $\frac{1}{2}$!



Drittel und Halbe kommen zusammen in Sechsteln.

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$.

$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

$\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ (2mal der 3te Teil von $\frac{1}{2}$), denn $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{6}$ stecken in $\frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{6}$ ($= 3 : 2$) nur $\frac{3}{2}$mal.

$\frac{1}{2} = \frac{3}{3} \times \frac{1}{3}$ (3mal die Hälfte von $\frac{1}{3}$), denn $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{3}{6} : \frac{2}{6} = 2 : 3 = \frac{2}{3} = 1\frac{1}{2}$.

Vergleiche $\frac{1}{2}$ mit $\frac{1}{4}$!

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \times \frac{1}{2}$, denn $\frac{2}{4} : \frac{1}{2} = 4 : 3 = \frac{4}{3}$*).

$\frac{1}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$, denn $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = 3 : 4 = \frac{3}{4}$.

c. Vergleicht 3 und 2!

Die Schüler werden sprechen: 3 ist um 1 größer als 2. Daran anknüpfend, fragt der Lehrer: Welcher Teil ist die Eins (um welche 3 größer ist als 2) von der Zwei? Antw.: Die Hälfte. Folglich ist 3 um die Hälfte größer als 2.

Wer eine 3 Meter lange Schnur hat, der hat eine um die Hälfte längere Schnur, als der Besitzer einer 2 Meter langen Schnur.

Wer 3 hundert, tausend ꝛc. Thaler hat, der hat um $\frac{1}{2}$ oder um die Hälfte mehr als der, welcher nur 2 hundert, tausend ꝛc. Thaler besitzt.

Drei ist also um die Hälfte größer als Zwei.

Nun wollen wir sehen, um welchen Teil von der 3 Zwei kleiner ist als Drei. 2 ist um 1 kleiner als 3. 1 ist der 3te Teil von 3. 2 ist also um $\frac{1}{3}$ kleiner als 3.

---

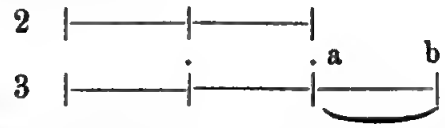
*) Der Lehrer vergesse nicht, daß hier Kopfrechnen Statt findet. — Die räumliche Anschauung dieser Verhältnisse hebt alle scheinbare Schwierigkeit.

Wenn Auguſt eine 2 Meter lange Schnur und Peter eine 3 Meter lange Schnur hat, ſo iſt die Schnur von A. um $\frac{1}{3}$ kürzer als die Schnur von P.

Wer 200 Thlr beſitzt, hat $\frac{1}{3}$ weniger als der, welcher 300 Thlr. beſitzt.

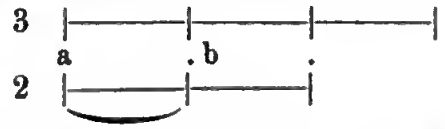
Zwei iſt um ein drittelmal kleiner als Drei.

Wir wollen das zeichnen!



Der erſte Strich bedeutet $2 \times 1 = 2$, der zweite $3 \times 1 = 3$. Der Teil, um welchen 3 größer iſt als 2, ſoll a b heißen. a b $= \frac{1}{3} \times 2$. Da aber $3 = 3 \times$ a b, ſo iſt ſie 3 mal $\frac{1}{3}$ von $2 = \frac{3}{3} \times 2$. Das heißt: Die Drei hat 3 ſolcher Teile, wie deren die Zwei nur Zwei hat.

In welchem Teilverhältniß ſteht aber 2 zur 3?



Da Zwei nur 2 ſolcher Teile hat, Drei deren 3, a b, der eine Teil von 2, aber ein Drittel von 3 iſt: ſo hat Zwei 2 mal ein Drittel von Drei, oder $2 = \frac{2}{3} \times 3$.

Wie verhalten ſich Thaler und öſtreichiſche Gulden.

Da 1 Thaler $= 3$ Mark, ein Gulden $= 2$ Mark iſt, ſo verhalten ſie ſich wie 3 zu 2.

In welchem Teilverhältniß ſtehen ſie?

Der Thaler iſt $\frac{3}{2}$ (3 mal der 2te Teil) von 1 Gulden, und der Gulden $\frac{2}{3}$ mal 1 Thaler oder 2 mal der dritte Teil von 1 Thaler.

In welchem Verhältnis ſteht die Berliner Elle zum Meter? wenn 1 Berliner Elle nahezu $\frac{2}{3}$ Meter iſt?

Antw.: Wie der Gulden zum Thaler oder wie 2 zu 3. Denn: Wenn 1 Elle $= \frac{2}{3}$ Meter iſt, ſo hat die Elle nur 2 Teile, wie deren das Meter drei hat.

Der Teil (a b), den das Meter mehr hat, als die Elle, iſt $\frac{1}{2}$ einer Elle, folglich hat das Meter $\frac{3}{2} \times 1$ Elle.

Folglich ſind 2, 3, 4, 5 ꝛc. Meter $= \frac{3}{2} \times 2, 3, 4, 5$ ꝛc. Ellen.

Da 1 Elle $= \frac{2}{3}$ Meter, ſo ſind 2, 3, 4, 5 ꝛc. Ellen $= \times \frac{2}{3}$, $3 \times \frac{2}{3}$, $4 \times \frac{2}{3}$, $5 \times \frac{2}{3}$.

d. Wie oft muß ich den Unterſchied von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ ſetzen, um 1, 2. 3 . . . zu bekommen?

Wie oft steckt der Unterschied von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ in $\frac{2}{3}$?

Wie oft muß ich $\frac{3}{4}$ zu sich selber zählen, um die Zahl 8 zu erhalten?

Das Achtfache von $\frac{1}{2}$ ist wie viel mehr als das Achtfache von $\frac{1}{3}$, und wie viel weniger als das Achtfache von $\frac{2}{3}$?

3) Was heißt $\frac{2}{3}$ Centner?

$\frac{2}{3}$ Ctr. sind 2 von den 3 gleichen Teilen, in welche ich 1 Ctr. geteilt habe.

Wie viel Pfund hat $\frac{2}{3}$ Ctr. mehr als $\frac{1}{2}$ Ctr.?

$\frac{1}{2}$ Ctr. $= 33\frac{1}{3}$ Pfd., $\frac{2}{3}$ Ctr. $= 66\frac{2}{3}$ Pfd., $\frac{1}{2}$ Ctr. $= 55$ Pfd; $66\frac{2}{3}$ Pfd. $-$ 55 Pfd. $= 11\frac{2}{3}$ Pfd.

Wie viel Kilogramm hat $\frac{2}{3}$ Ctr. mehr als $\frac{1}{2}$ Ctr.?

Wie viel beträgt der Unterschied von $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ Pfund in Neulot?

Was kosten $\frac{2}{3}$ Pfund, wenn man das Kilogramm mit 1 östr. Gulden bezahlt?

1 Kilogr. $=$ 2 Pfund. Kosten 2 Pfd. 1 Gulden, so kostet 1 Pfd. $\frac{1}{2}$ Gulden $=$ 1 Mark.

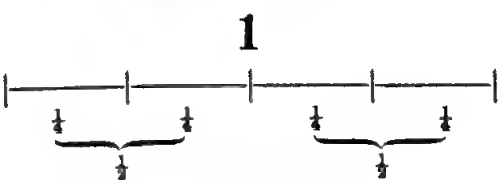
Wie viel Packete können aus $7\frac{1}{2}$ Kilogramm Thee gemacht werden, wenn auf jedes $\frac{1}{2}$ Pfund, wie viel aber, wenn auf jedes $\frac{1}{3}$ Pfund genommen wird?

$7\frac{1}{2}$ Kil. $=$ 15 Pfund. Da 15 Pf. $= \frac{150}{2}$ Pfd., so können ꝛc. Da 15 Pfd. $= \frac{45}{3}$ Pfd., so können 45 Packete zu $\frac{1}{3}$ Pfd. davon gemacht werden.

Dritte Stufe.

Die Viertel.

1)



Wenn ich 1 in 4 gleiche Teile teile ꝛc.

$4 : 1 = \frac{1}{4}$. Oder $\frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$.

a. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = \frac{2}{2} = 1$.

b. $1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $4 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

c. $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

d. $\frac{1}{4} : \frac{1}{4} = 1$, $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$, $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3$, $\frac{1}{4} : 1 = 4$.

α. $4 : 1 = \frac{4}{1}$, $4 : 2 = \frac{4}{2}$, $4 : 3 = \frac{4}{3}$ ꝛc.

$\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$, $\frac{1}{4} \times 100 = \frac{100}{4}$ ꝛc.

aa. $4\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 4 + \frac{4}{4} = 4 + 1 = 5$.

$4\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} = 8\frac{2}{2}$ ꝛc.

bb. $1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $9 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ ꝛc.

$9 \times 1\frac{1}{4} = 9 + \frac{9}{4} = 9 + 2 + \frac{1}{4} = 11\frac{1}{4}$ ꝛc.

$9 \times 3\frac{3}{4} = 27 + \frac{27}{4} = 27 + 6\frac{3}{4} = 33\frac{3}{4}$ ꝛc.

$\frac{1}{4} \times 9 = \frac{9}{4}$, $\frac{3}{4} \times 9 = \frac{27}{4}$, $\frac{3}{4} \times 16 = \frac{48}{4} = 12$ ꝛc.

cc. $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $16 - \frac{1}{4} = 15\frac{3}{4}$ ꝛc.

$20 - \frac{3}{4} = 19\frac{1}{4}$, $20\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 20\frac{1}{4}$,

$20 - 6\frac{3}{4} = 13\frac{1}{4}$, $20\frac{3}{4} - 6\frac{1}{2} = 14\frac{1}{4}$ ꝛc.

dd. $\frac{1}{4} : 1 = 4$, alſo $\frac{1}{4}$ in 8×1 oder $8 = 8 \times 4 = 32$, $\frac{1}{4} : 32 = 4 \times 32 = 128$ Oder:

$\frac{1}{4} : 5 = \frac{1}{4} : \frac{20}{4} = 1 : 20 = 20.$

$\frac{1}{4} : 5\frac{3}{4} = \frac{1}{4} : \frac{23}{4} = 1 : 23 = 23.$

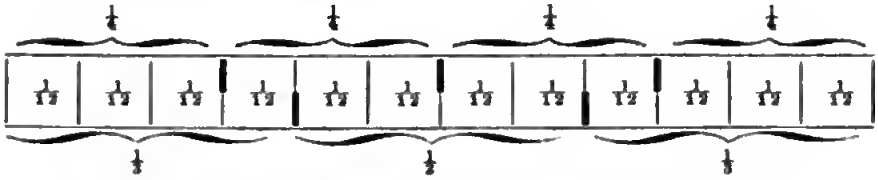
$6\frac{1}{4} : 25 = 4$ ($6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$, $25 = \frac{100}{4}$).

$6\frac{3}{4} : 27 = 4$ ($\frac{1}{4} : 1 = 4$, $\frac{27}{4} : 27 = 27$).

$\frac{3}{4} : 1 = \frac{3}{4} = 1\frac{1}{3}$ ($\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3 : 4$).

$\frac{3}{4} : 2.\ 3,\ 5,\ 6$ ꝛc.

2) a. Vergleiche $\frac{1}{4}$ mit $\frac{1}{3}$! *).



Viertel und Drittel kommen zuſammen in Zwölfteln.

$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$.

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$, $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$.

$\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$, denn $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$ ($\frac{4}{12} : \frac{3}{12}$).

$\frac{1}{3} = \frac{3}{3} \times \frac{1}{4}$, denn $\frac{1}{4} : \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$ ($\frac{3}{12} : \frac{4}{12}$).

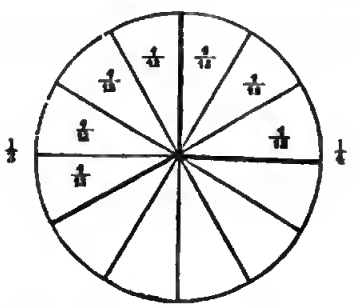
Vergleiche $\frac{1}{4}$ mit $\frac{2}{3}$!

$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$.

$\frac{1}{4} = \frac{8}{8} - \frac{5}{12}$, $\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{5}{12}$.

---

*) Kann auch zweckmäßig im Kreiſe veranſchaulicht werden, und zwar ſo,



daß man den Kreis erſt in zwei gleiche Hälften teilt, und dieſe wieder in zwei gleiche Teile, alſo das Ganze in $\frac{1}{4}$. Ein zweiter gleich großer Kreis daneben geſtellt, wird in 3 gleiche Teile geteilt, dann jeder derſelben in 4. Dann mögen die Halben durch eine ſtarke Linie, die Viertel durch punktierte Linien kenntlich gemacht werden. Aehnlich verfährt man auf den folgenden Stufen. Herr Pfarrer Hauff in ſeiner ſchätzenswerten Rezenſion (Südd. Schulbote 1852, Nr. 21) legt nicht mit Unrecht großes Gewicht auf Darſtellung der Brüche im Kreiſe, nur wäre zu wünſchen, daß dann jeder Schüler ſelbſt ſich die Figur anfertigt; doch es müßte zu dieſem Zweck ein Reißzeug gebraucht werden, was für Elementarklaſſen und zahlreiche Schüler ſeine beſondere Schwierigkeit haben möchte. Der Lehrer kann aber jedenfalls an die Wandtafel zeichnen, und mag außer dem Kreiſe auch des Quadrats und Rechtsecks ſich bedienen. Mit einfachen Strichen macht ſich die Sache am leichteſten, obwohl auch dabei ein Zirkel in der Hand des Schülers ſein ſollte.

$\frac{1}{4} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{3}$ (der 8te Teil von $\frac{1}{3}$ 3 mal genommen), denn $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$ steckt mit seinem 8ten Teile 3mal in $\frac{1}{4}$ ($\frac{8}{12} : \frac{3}{12}$).

$\frac{3}{8} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{1}$, denn $\frac{1}{1} : \frac{3}{8} = \frac{8}{3}$ ($\frac{8}{12} : \frac{3}{12}$)

Vergleiche $\frac{7}{8}$ mit $\frac{3}{4}$!

$\frac{7}{8} = \frac{9}{12}$, $\frac{3}{4} = \frac{8}{12}$.

$\frac{7}{8} = \frac{3}{4} + \frac{1}{12}$, $\frac{3}{4} = \frac{7}{8} - \frac{1}{12}$.

$\frac{7}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$ (weil $9 \times \frac{1}{12}$), denn $\frac{3}{4} : \frac{7}{8} = \frac{6}{7}$ oder $1\frac{1}{7}$.

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \times \frac{7}{8}$ (weil $8 \times \frac{1}{12}$) denn $\frac{7}{8} : \frac{3}{4} = \frac{7}{6}$ ($\frac{9}{12} : \frac{8}{12}$).

b. Worin kommen Halbe, Drittel und Viertel zusammen?

Da die Halben und Viertel in Vierteln, Viertel und Drittel aber in Zwölfteln zusammenkommen, so kommen auch Halbe, Drittel und Viertel in Zwölfteln zusammen.

$1 = \frac{12}{12}$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{12}{12} = \frac{6}{12}$, $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{12}{12} = \frac{4}{12}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{12}{12} = \frac{3}{12}$.

c. Wie $\frac{1}{4} : \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$ oder $1\frac{1}{3}$, so auch die Vielfachen:

$2 \times) \ \frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$

$3) \times \frac{3}{4} : 1 = \frac{3}{4}$ — d. h. a hat 4 Teile,

$4 \times) \ 1 : 1\frac{1}{3}$ ($\frac{3}{3} : \frac{4}{3}$) $= \frac{3}{4}$ — wie deren b 3 hat.

$5 \times) \ 1\frac{1}{4} : 1\frac{2}{3}$ ($\frac{15}{12} : \frac{20}{12}$) $= \frac{3}{4}$ — ($15 = 3 \times 5$, $20 = 4 \times 5$)

2c.

Wie verhalten sich die Zahlen 3 und 4?

3 hat 3×1, $4 = 4 \times 1$. Da $1 = \frac{1}{4} \times 4$, so hat 3 nur $\frac{3}{4} \times 4$. Da $1 = \frac{1}{3} \times 3$, so hat $4 \ \frac{4}{3} \times 3$. Oder 4 ist $\frac{4}{3}$ mal größer als 3, und 3 ist $\frac{3}{4}$ mal kleiner als 4.

Zeige dasselbe Verhältnis an dem 3-, 6-, 9-, 10fachen von 3 und 4!

Das 3fache von $3 = 9$, das 3fache von $4 = 12$. Da 9 nur 3 solcher Teile hat, wie deren 12 4 hat, so ist $9 = \frac{3}{4} \times 12$, und da die 3, um welche 12 größer ist als 9, $\frac{1}{3}$ von 9 ist, so hat $12 \ \frac{4}{3} \times 9$ (4 mal den 3ten Teil von 9).

d. Zwei Zahlen geben die Summe $16\frac{5}{12}$; die eine heißt $6\frac{3}{4}$, wie die andere?

$16\frac{5}{12} - 6\frac{3}{4} = 16 - 6\frac{3}{4} + \frac{5}{12}$. $16 - 6 = 10$, $10 - \frac{3}{4} = 9\frac{1}{4}$, $9\frac{1}{4} + \frac{5}{12} = 9\frac{8}{12} = 9\frac{2}{3}$.

Von $16\frac{5}{12}$ und einer unbekannten Zahl ist der Unterschied $9\frac{3}{4}$, wie heißt die Fragezahl?

$16\frac{5}{12} - 9\frac{3}{4} = 16 - 9\frac{3}{4} + \frac{5}{12}$.

Setze $16\frac{5}{12}$ als die kleinere von beiden, und den Unterschied ebenfalls $9\frac{3}{4}$, wie heißt nun die andere Zahl?

$16\frac{5}{12} + 9\frac{3}{4} = 16\frac{5}{12} + \frac{9}{12}$ 2c.

e. 1 Centner verhält sich zu $\frac{3}{4}$ Ctr., wie welche ganze Zahlen?

Wie 100 zu 75 oder wie 4 zu 3.

Wie oft muß ich $\frac{3}{4}$ Centner nehmen, um 1 Ctr. zu erhalten?

Da 1 Ctr. zu $\frac{3}{4}$ Ctr. sich verhält wie 4 zu 3, so muß ich 4 mal den 3ten Teil oder $\frac{4}{3} \times \frac{3}{4}$ Ctr. nehmen, um 1 Ctr. zu bekommen.

f. Wie oft muß ich $6\frac{1}{4}$ nehmen, um $8\frac{1}{3}$ zu bekommen?

So oft, als $6\frac{1}{4}$ in $8\frac{1}{3}$ steckt. $6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$, $8\frac{1}{3} = \frac{25}{3}$, $\frac{25}{4} : \frac{25}{3} = \frac{1}{4} : \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$, also muß ich $6\frac{1}{4} \ \frac{3}{4}$ mal (den 3ten Teil 4 mal) nehmen, um $8\frac{1}{3}$ zu bekommen.

Thue das!

Wie oft muß ich $8\frac{1}{3}$ nehmen, um $6\frac{1}{4}$ zu bekommen?

So oft, als $8\frac{1}{3}$ in $6\frac{1}{4}$ enthalten iſt; $8\frac{1}{3} = \frac{25}{3}$, $6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$; $\frac{25}{3} : \frac{25}{4} = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$; alſo ꝛc.

Das Drittel von $6\frac{1}{4}$ iſt das Viertel welcher Zahl?

Das Viertel von $8\frac{1}{3}$ iſt welcher Teil von $6\frac{1}{4}$?

g. Wenn ich von einer Zahl 12 wegnehme, behalte ich $\frac{1}{4}$ derſelben übrig. Wie iſt dieſe Zahl?

Behalte ich von einer Zahl $\frac{1}{4}$ übrig, ſo habe ich $\frac{3}{4}$ derſelben weggenommen. Da ich 12 weggenommen habe, ſo iſt 12 $\frac{3}{4}$ von der unbekannten Zahl, alſo $\frac{1}{4} = \frac{12}{3} = 4$, die ganze Zahl aber $4 \times 4 = 16$.

Wie verhält ſich das Weggenommene zu der ganzen Zahl?

Wie der Reſt zu dem Subtrahendus? ꝛc.

3) a. Was heißt $\frac{3}{4}$ Ctr., und wie viel Pfund ſind $\frac{3}{4}$ Ctr.?

$\frac{3}{4}$ Ctr. heißt der 4te Teil von 1 Ctr. 3 mal genommen. Da 1 Ctr. = 100 Pfd., ſo iſt $\frac{1}{4}$ Ctr. $= \frac{100}{4}$ Pfd. $= 25$ Pfd., $\frac{3}{4}$ Ctr $= 3 \times 25$ Pfd. $= 75$ Pfd.

Wie viel Neulot ſind $\frac{3}{4}$ Pfund?

Wie viel Mandel $\frac{3}{4}$ Schock?

b. Wie viel ſind $\frac{1}{2}$ Schock $+ \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ Schock mehr als $\frac{3}{4}$ Schock?

$\frac{1}{2}$ Schock $= 30$ Stück, $\frac{1}{3}$ Schock $= 20$ Stück, $\frac{1}{4}$ Schock $= 15$ Stück. $30 + 20 + 15 = 65$ Stück. $\frac{3}{4}$ Schock ſind aber nur 45 Stück, alſo um 20 Stück $=$ $\frac{1}{3}$ Schock geringer. Alſo ſind $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ Schock um $\frac{1}{3}$ Schock mehr als $\frac{3}{4}$ Schock. Oder: $\frac{1}{2}$ Schock $+ \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ Schock $= \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12}$ Schock $= \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$ Schock. $- \frac{3}{4}$ Schock $= \frac{9}{12}$ Schock. $\frac{13}{12} - \frac{9}{12} = \frac{4}{12}$. Da $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ Schock, ſo ſind $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ Schock um $\frac{1}{3}$ Schock $= 20$ Stück mehr als $\frac{3}{4}$ Schock.

c. Drücke 96 Neulot in Kilos, Pfunden und Lot aus!

$96 = 50 + 46$, alſo $\frac{1}{2}$ Kilo und 46 Lot, oder 1 Pfund und 46 Lot.

Wie viel fehlt noch am ganzen Kilo und, welcher Teil deſſelben ſind dieſe 4 Lot?

Wie viel beträgt das Achtfache von 75 Pfennig?

75 Pfennig $= \frac{3}{4}$ Mark. $8 \times \frac{3}{4}$ Mark $= \frac{24}{4} = 6$ Mark. Alſo beträgt ꝛc.

d. Herr N. unternahm eine Reiſe, für die er 300 Mark beſtimmte, wobei er auf jeden Tag $12\frac{1}{2}$ Mark rechnete. Wie lange gedachte er zu reiſen?

So viel mal er $12\frac{1}{2}$ Mark von 300 Mark wegnehmen konnte, ſo viel Tage konnte er reiſen. $12\frac{1}{2}$ Mark $= \frac{25}{2}$ Mark. $\frac{1}{2}$ Mark ſteckt in 300 Mark 600 mal; $\frac{24}{2}$ Mark und der 25. Teil von 600. $\frac{600}{25} = 4$, $\frac{600}{25} = 6 \times 4 = 24$. Alſo konnte der Mann 24 Tage reiſen.

Setze das Reiſegeld für 1 Tag als unbekannt, und die Reiſezeit als bekannt; wie lautet nun die Aufgabe?

Herr N. war 24 Tage verreiſt geweſen und hatte 300 Mark ausgegeben. Wie viel im Durchſchnitt jeden Tag?

Was er täglich verbrauchte, war der 24. Teil von 300 Mark. $\frac{1}{24} \times 300$ (der 24. Teil von 300) $= \frac{300}{24}$. Da $\frac{300}{24} = 12\frac{1}{2}$, ſind $\frac{300}{24} = 10 \times 12\frac{1}{2} = \frac{250}{2} =$ $12\frac{1}{2}$ Mark. Alſo hatte er im Durchſchnitt jeden Tag $12\frac{1}{2}$ Mark verzehrt.

e. Zwei Herren, A. und B., ſchoſſen für eine arme Familie Geld zuſammen. A. gab 36 Mark mehr als B., der nur $\frac{1}{3}$ der Summe des A. beiſteuerte. Wie groß war dieſe?

Beurteilung.

Vergleiche die Beiträge von A. und B.

Beitrag von A. = Beitrag von B. + 36 Mark.
Beitrag von B. = $\frac{3}{4}$ × Beitrag von A.

Wenn B. $\frac{3}{4}$ der Summe des A. beiträgt, so macht der Beitrag von A, wie viel Viertel aus?

Ein Ganzes = $\frac{4}{4}$.

Wie viel Teile giebt demnach A. und wie viel B.?

A. giebt 4 Teile und B. 3 Teile.

Aus wie viel gleichen Teilen ist also diese Summe zusammengesetzt?

Aus 4 + 3 = 7 Teilen.

Wie viel von diesen Teilen giebt A. mehr als B.?

A. giebt 1 Teil mehr als B.

Wie nennst du diesen Teil mit Bezug auf das Ganze?

Ein Siebentel.

Wie viel ist das, was A. mehr giebt, im Gelde?

Das Ganze ꝛc. = 36 Mark.

Wie viel sind diese 36 Mark von der ganzen Summe?

Ein Siebentel.

Der Schüler schließt nun selbst.

Ausrechnung.

Da die ganze Summe aus 7 gleichen Teilen besteht, und 1 Teil 36 Mark beträgt, so ist die ganze Summe = 7 × 36 Mark = 252 Mark.

a. Wie viel ist der Anteil des A., und wie viel der des B.?

b. A. und B. schossen eine Summe von 252 Mark zusammen, A. gab dazu 144 Mark; wie viel von der Summe des A. gab B.?

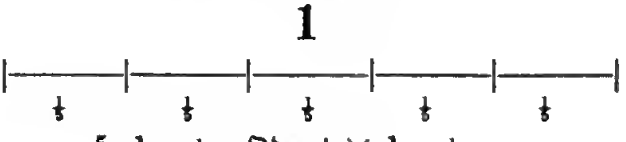
c. B. gab 108 Mark zu der Summe von 252 Mark und das war gerade $\frac{3}{4}$ der Summe des A., wie viel gab dieser?

d. A. gab 144 Mark, B. 36 Mark weniger. Das, was A. mehr gab, war $\frac{1}{7}$ der ganzen Summe. Wie viel betrug diese?

Vierte Stufe.

Die Fünftel.

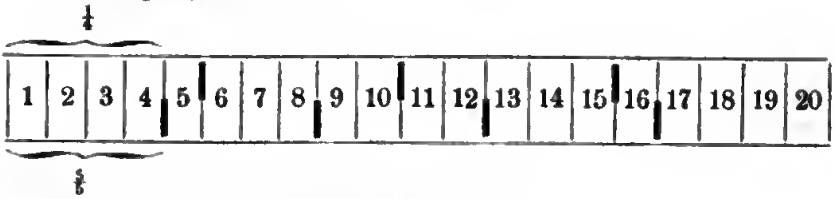
1)



5 : 1 = $\frac{1}{5}$. Oder $\frac{1}{5}$ × 1 = $\frac{1}{5}$.

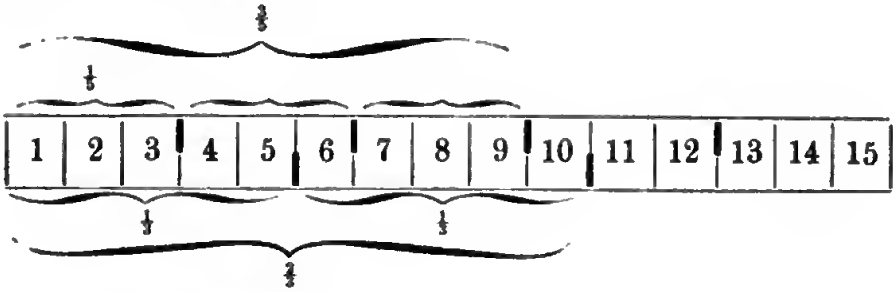
Wie auf den vorigen Stufen!

2) a. Vergleiche $\frac{1}{5}$ mit $\frac{1}{4}$!



Vergleiche $\frac{1}{5}$ mit $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$ mit $\frac{1}{4}$! $\frac{3}{5}$ mit $\frac{3}{4}$!*)
Wie auf den vorigen Stufen!

b. Vergleiche $\frac{1}{5}$ mit $\frac{1}{3}$!



Vergleiche $\frac{2}{5}$ mit $\frac{2}{3}$!

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15},\quad \frac{2}{3} = \frac{10}{15},\quad \frac{2}{5} = \frac{2}{3} - \frac{4}{15}.$$

2c.

Wie auf den vorigen Stufen!

c. Worin kommen Halbe, Drittel, Viertel und Fünftel zusammen?

Da Halbe, Drittel und Viertel in Zwölfteln zusammenkommen, so sehe ich zu, worin Fünftel und Zwölftel zusammenkommen. Ich teile das Fünftel in 12, und das Zwölftel in 5 Teile, so wird das Ganze in 60 gleiche Teile zerlegt. Ist $1 = \frac{60}{60}$, so ist $\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$, $\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$ 2c.

d. Ist $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$, so ist auch

$$6 \times \tfrac{1}{2} : 6 \times \tfrac{1}{4} = 1\tfrac{1}{2} : 1\tfrac{1}{4} = \tfrac{2}{4},$$
$$10 \times \tfrac{1}{2} : 10 \times \tfrac{1}{4} = 2 : 2\tfrac{2}{4} = \tfrac{2}{4} \text{ 2c.}$$

Ist $\frac{2}{3}$ in $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ mal enthalten, so ist auch

$$3 \times \tfrac{2}{3} : 3 \times \tfrac{2}{5} = 2 : 1\tfrac{1}{5} = \tfrac{2}{5} \text{ 2c.}$$

b. h. die eine Zahl hat 3 solcher Teile, wie die andere 5 hat.
In welchem Verhältnis stehen die Zahlen 3 und 5?

$$3 = 3 \times 1.$$
$$5 = 5 \times 1.$$

Da 1 der fünfte Teil von 5, so ist 3 um $\frac{2}{5} \times 5$ kleiner als 5. Da 1 der dritte Teil von 3, so ist 5 um $\frac{2}{3} \times 3$ größer als 3. Oder:

*) Man lasse oft einen Schüler an die Wandtafel treten und durch Zeichnung diese Zahlverhältnisse darstellen. Die Schüler bekommen bald große Fertigkeit in diesem „Zahlenzeichnen", und es macht ihnen viel Vergnügen.

Die 5 hat 5 solcher Teile, wie die 3 deren 3 hat, folglich ist $5 = \frac{5}{3} \times 3$, und $3 = \frac{3}{5} \times 5$.

Dasselbe Verhältnis bei 6 und 10 (2×3 und 2×5), 9 und 15, 12 und 20 ꝛc.

Ebenso das Verhältnis von 4 und 5 in ihren Vielfachen.

Das Dutzend verhält sich zum Mandel wie 4 zu 5. Das Wievielfache vom Mandel ist das Dutzend und das Wievielfache vom Dutzend das Mandel:

1 Dutzend $= \frac{4}{5}$ Mandel, 1 Mandel $= \frac{5}{4}$ Dutzend.

e. Zwei Zahlen, wovon die eine $6\frac{1}{3}$, geben die Summe $18\frac{2}{3}$, wie heißt die andere Zahl?

$18\frac{2}{3} - 6\frac{1}{3}$. $18 - 6 = 12$, $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{10}{15} - \frac{5}{15} = \frac{5}{15}$. $18\frac{2}{3} - 6\frac{1}{3} = 12\frac{7}{15}$ Oder: $18\frac{2}{3} - 6 = 12\frac{2}{3}$, $12\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 12\frac{10}{15} - \frac{5}{15} = 12\frac{7}{15}$. Oder $18\frac{2}{3} - 6\frac{1}{3} = 18 - 6\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$. $18 - 6\frac{1}{3} = 11\frac{2}{3}$ ꝛc.

f. Wie oft muß ich $3\frac{3}{5}$ nehmen um 18 zu bekommen?

$3\frac{3}{5} = \frac{18}{5}$, $18 = \frac{90}{5}$; $\frac{18}{5} : \frac{90}{5} = 18 : 90 = 5$. Oder: Wie $\frac{1}{5} : 1 = 5$, so $\frac{18}{5} : 18 = 5$. Oder: $\frac{1}{5} : 1 = 5$, $\frac{1}{5} : 18 = 90$, $\frac{18}{5} : 18 = \frac{90}{18} = 5$.

3) a. Wie erhalte ich $\frac{4}{5}$ Ctr.?

Dadurch, daß ich den 5ten Teil eines Centners 4 mal nehme, oder 4 Ctr. $\frac{1}{5}$ mal nehme.

b. Drücke den Unterschied von $\frac{1}{2}$ Ctr., $\frac{1}{3}$ Ctr., $\frac{1}{4}$ Ctr. und $\frac{1}{5}$ Ctr. in Pfunden aus!

c. Wie berechnest du das Achtfache von 19 Pf. in Fünftel-Mark?

8×19 Pf. $= 152$ Pf. $\frac{1}{5}$ Mark $= 20$ Pf. 20 Pf. sind in 152 Pf. 7 mal enthalten mit dem Rest von 12. Also ist des Achtfache von 19 Pf. $= \frac{7}{5}$ Mark 12 Pf.

d. $\frac{1}{3}$ Pfd. kostet $\frac{1}{4}$ Mark, wie viel $\frac{1}{5}$ Pfd.?

Kostet $\frac{1}{3}$ Pfd. $\frac{1}{4}$ Mark, so kostet 1 Pfd. ($= 3 \times \frac{1}{3}$ Pfd.) $3 \times \frac{1}{4}$ Mark $= \frac{3}{4}$ Mark. $\frac{1}{5}$ Pfd. aber oder $\frac{1}{5} \times 1$ Pfd. kostet $\frac{1}{5} \times \frac{3}{4}$ Mark $= \frac{3}{20}$ Mark.

Wie viel sind $\frac{3}{20}$ Mark in Pf.?

Da 1 Mark $= 100$ Pf., so ist $\frac{1}{20}$ Mark $= \frac{1}{20} \times 100$ Pf. $= 5$ Pf. $\frac{3}{20}$ Mark $= 15$ Pf.

Man erhält für 3 Mark $\frac{1}{5}$ Centner, wie viel wird man für 5 Mark erhalten:

Erhält man für 3 Mark $\frac{1}{5}$ Ctr., so würde man für 1 Mark den 3 Teil von $\frac{1}{5}$ Ctr. $= \frac{1}{15}$ Ctr. erhalten, also für 5 Mark $5 \times \frac{1}{15}$ Ctr. $= \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ Ctr.

$\frac{1}{3}$ Centner kostet $4\frac{1}{2}$ Mark, wie viel $\frac{1}{5}$ Ctr.?

Kostet $\frac{1}{3}$ Ctr. $4\frac{1}{2}$ Mark, so kostet 1 Ctr. 3 mal $4\frac{1}{2} = 13\frac{1}{2}$ Mark $= \frac{27}{2}$ Mark. $\frac{1}{5}$ Ctr. den 5. Teil $= \frac{27}{10}$ Mark $= 2$ Mark 70 Pf.

e. Jemand verwendet $\frac{2}{3}$ seines Einkommens auf den Lebensunterhalt, $\frac{1}{5}$ des Restes zu seinem Vergnügen, und behält noch 48 Thlr. für die Armen übrig. Wie groß war sein ganzes Einkommen?

a. Verwendet er $\frac{2}{3}$ auf den Lebensunterhalt, so bleiben ihm noch $\frac{1}{3}$ seines Einkommens übrig.

b. $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$ wird also auf das Vergnügen gewandt.

c. Da vom Lebensunterhalt noch $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ des Einkommens übrig bleiben, so bleibt nach Abzug des $\frac{1}{15}$ noch $\frac{4}{15}$ vom Ganzen übrig.

d. Diese $\frac{4}{15}$ sind gleich den 48 Thlrn.

e. Also $\frac{1}{15} = \frac{12}{180}$ Thlr. = 12 Thlr.
f. Also das ganze Einkommen oder $\frac{15}{15} = 15 \times 12$ Thlr. = 180 Thlr.

α. Wie viel Thaler werden auf den Lebensunterhalt und wie viel auf das Vergnügen gewandt? Wie verhalten sich beide Summen? Wie das Geld für das Vergnügen zum Gelde für die Armen? Welcher Teil vom Ganzen sind die 48 Thaler? ($\frac{4}{15}$).

β. Jemand hatte ein Einkommen von 180 Thlrn. Davon brauchte er $\frac{2}{3}$ zu seinem Lebensunterhalte, und $\frac{1}{15}$ zu seinem Vergnügen. Das Uebrige bestimmte er für die Armen. Wie viel war das?

γ. Jemand hatte ein jährliches Einkommen von 180 Thlrn., wovon er $\frac{2}{3}$ zu seinem Lebensunterhalte brauchte und 48 Thlr. den Armen gab. Wie viel vom Ganzen konnte er auf sein Vergnügen wenden?

Vergleichung der alten und neuen Maße und Gewichte.

1 Meter ist nahezu $3\frac{1}{2}$ preußische Fuß. Ist 1 Meter $= 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ preuß. Fuß, so hat es 16 solcher Teile, wie deren der Fuß nur 5 hat. Hat der preuß. Fuß nur 5 Teile, wie sie das Meter 16 hat, so ist er $\frac{5}{16}$ Meter.

Wie viel Meter sind demnach 2, 3, 4, 20, 25 preuß. Fuß?

Wie viel preuß. Fuß sind 2, 3, 5 ꝛc. Meter?

1 Berliner Elle (= $2\frac{1}{2}$ preuß. Fuß) hat nahezu $\frac{4}{5}$ Meter, verhält sich also zum Meter wie 2 zu 3.

1 Zoll = $2\frac{1}{2}$ Neuzoll. Wie verhält sich also der alte und neue Zoll?

Ist der alte Zoll = $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ Neuzoll, so hat er 13 solcher Teile, wie deren der Neuzoll 5 hat. Da ein solcher Teil = $\frac{1}{5}$ Neuzoll ist, so hat der ganze Neuzoll ($\frac{5}{5}$) $\frac{13}{5}$ vom alten.

1 Neuzoll = $\frac{13}{5}$ Altzoll,
1 Altzoll = $\frac{5}{13}$ Neuzoll.

Das Verhältnis beider wird durch die Zahlen 5 und 13 ausgedrückt.

Ein Zollstab, auf der einen Seite mit alten, auf der andern mit neuen Z. wird vorgezeigt!

30 alte Lot sind 50 Neulot. Folglich hat 1 altes Lot den 30sten Teil von 50 Neulot $= \frac{50}{30} = 1\frac{2}{3}$ Lot.

1 altes Lot $= \frac{5}{3}$ Neulot

heißt, das alte Lot hat 5 solcher Teile, wie deren das Neulot nur 3 hat. Da ein solcher Teil $\frac{1}{5}$ des alten Lotes ist, so ist 1 Neulot $= \frac{3}{5} \times 1$ altes Lot. Wie sich die Ganzen verhalten, so ihre Teile. Teilt man das alte Lot in 10 Quentchen, das Neulot in 10 Gramm, so muß sich auch 1 Quentchen zum Gramm verhalten, wie das Altlot zum Neulot. Da 1 Neulot $= \frac{3}{5}$ vom Altlot ist, so ist auch 1 Gramm $\frac{3}{5}$ vom Quentchen und da 1 Altlot $= \frac{5}{3}$ Neulot, so ist auch 1 Quentchen $= \frac{5}{3}$ Gramm.

5 Quentchen sind also $5 \times \frac{5}{3}$ Gramm $= \frac{25}{3}$ Gramm $= 8\frac{1}{3}$ Gramm.

5 Gramm $= 5 \times \frac{3}{5}$ Quentchen $= \frac{15}{5} = 3$ Quentchen.

1 Wispel hat $13\frac{1}{2}$ Hektoliter.*)

*) Genauer $13\frac{4}{7}$. Bei kleineren Rechnungen kann man sich mit dem bequemeren Bruch behelfen.

Hat 1 Wispel $\frac{5}{6}$ Hektoliter, so hat er 66 solcher Teile, wie deren der Hektoliter nur 5 hat. Ein Fünftel des Hektoliters ist also $\frac{1}{66}$ des Wispels, folglich ein ganzer Hektoliter $= \frac{5}{66}$ Wispel.

Wie viel Wispel aber beträgt 1 Neuscheffel, wenn etwa $26\frac{2}{3}$*) Neuscheffel = 1 Wispel sind?

Ist 1 Wispel $= 26\frac{2}{3} = \frac{80}{3}$ Neuscheffel, so hat er 132 solcher Teile, wie deren der Neuscheffel nur 5 hat. Da 1 solcher $= \frac{1}{5}$ Neuscheffel, so ist 1 ganzer Neuscheffel 5 mal der 132ste Teil des Wispels $= \frac{5}{132} \times 1$ Wispel.

Wie viel Wispel sind 8, 20, 40 Neuscheffel.

Da 1 Neuscheffel $= \frac{5}{132} \times 1$ Wispel, so sind 8 Neuscheffel $= \frac{5}{132} \times 8$ Wispel $= 8 \times \frac{5}{132}$ Wispel $= \frac{40}{132} = \frac{10}{33} = \frac{10}{33}$ Wispel.

Auch das Verhältnis vom Altscheffel und Neuscheffel kann hier mitgeteilt werden.

1 Altscheffel $= 1\frac{1}{10}$ Neuscheffel.

Der Altscheffel hat also $\frac{11}{10}$ vom Neuscheffel ($\frac{110}{10}$), und $\frac{1}{10}$ Neuscheffel ist nur der 11te Teil ($\frac{1}{11}$) vom Altscheffel. Folglich $\frac{1}{10}$ oder der ganze Neuscheffel $= \frac{10}{11}$ Altscheffel.

Wie viel Altscheffel sind 2, 5, 9 ꝛc. Neuscheffel?

Wie viel Neuscheffel sind 5 Altscheffel?

1 Altscheffel $= 1\frac{1}{10}$ Neuscheffel.
5 Altscheffel $= 5 \times 1\frac{1}{10} = 5\frac{1}{2}$ Neuscheffel.

Der Schneidermeister N. forderte bis jetzt zur Anfertigung eines neuen Rockes $3\frac{1}{4}$ Ellen und für eine Hose $1\frac{3}{4}$ Ellen Tuch. Wie viel muß er von dem Tuch nun in Metern nehmen?**)

Da 1 Elle $= \frac{3}{4}$ Meter, so sind $3\frac{1}{4}$ Ellen $= 3\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$ Meter. 3 mal $\frac{3}{4}$ Meter $= \frac{9}{4} = 2$ Meter. $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$ Meter $= \frac{3}{16}$ Meter. Folglich mußte der Schneidermeister zum Rocke $2\frac{3}{16}$ Meter fordern ꝛc.

Was kosten 3 Meter 75 Centimeter Tuch zu einem neuen Anzuge, wenn das Meter mit 2 Thlrn. 20 Sgr. bezahlt wird?

3 Meter 75 Centimeter $= 3\frac{3}{4}$ Meter. Kostet 1 Meter 2 Thlr. 20 Sgr., so kosten 3 Meter 3×2 Thlr. 20 Sgr. ($2\frac{2}{3}$ Thlr.) $= 8$ Thaler. $\frac{1}{4}$ Meter kostet den vierten Teil von 2 Thlrn. 20 Sgr., $\frac{3}{4}$ Meter also 60 Sgr. $= 2$ Thlr. Das ganze Tuch kostet also $= 8 + 2 = 10$ Thaler.

Ein Zimmermann erhielt bis jetzt für den laufenden Fuß Holz zu zimmern $10\frac{1}{2}$ Pfennig. Wie viel wird er für das laufende Meter berechnen müssen?

Da 1 Meter $3\frac{1}{3}$ preußische Fuß, so wird der Preis auch $3\frac{1}{3} \times 10\frac{1}{2}$ Pf. betragen. $3 \times 10\frac{1}{2}$ Pf. $= 31\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3} \times 10\frac{1}{2}$ Pf. $= 2\frac{1}{10}$ Pf. macht zusammen $31\frac{1}{2} + 2\frac{1}{10}$ Pf. $= 33\frac{3}{5}$ Pfennig $= 2$ Sgr. $9\frac{3}{5}$ Pf. Oder: Da der preußische Fuß $= \frac{3}{10}$ Meter, so ist der Lohn für den Fuß $= \frac{3}{10}$ des Lohnes vom Meter. Folglich muß das Meterlohn 16 solcher Teile haben, wie deren das Fußlohn 5 hat. $\frac{3}{5} \times 10\frac{1}{2} = 2\frac{1}{10}$ Pf. $16 \times 2\frac{1}{10}$ Pf. $= 33\frac{3}{5}$ Pf.

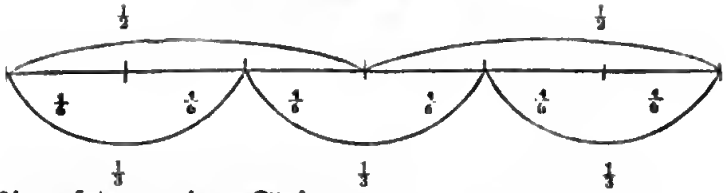
---

*) Genauer $26\frac{8}{11}$.

**) Aus G. Kentenich: Der Rechenunterricht in der Volksschule (2te Aufl.), worin die Reduktionen gründlich behandelt sind.

Fünfte Stufe.

Die Sechstel.

1) 

Wie auf den vorigen Stufen.

(Auch im Kreise und Rechteck zu veranschaulichen.)

a. $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}$; $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$; $\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$.

b. $1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$, $2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{6}$ ꝛc.

c. $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$, $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ ꝛc.

d. $\frac{1}{6}:1=6$, $\frac{2}{6}:1=3$, $\frac{3}{6}:1=2$.

ꝛc.

2) a. Da 6 Teile $= 2\times3$ oder 3×2 Teile, so lassen sich Sechstel auch in Dritteln und Halben ausdrücken, wie solches schon früher erkannt ist. Anwendung: Da 8 Teile $= 2\times4$ oder 4×2 Teile, lassen sich Achtel auch auf Viertel oder Halbe zurückführen. Da 12 Teile $=$ ꝛc., so lassen sich Zwölftel auf Drittel, Viertel, Sechstel und Halbe zurückführen.

Warum lassen sich aber $\frac{1}{8}$ nicht in Halben oder Dritteln ausdrücken?

Weil $\frac{1}{8}$ nicht in $\frac{6}{8}$ (im Ganzen) ohne Rest aufgehen.

b. Vergleiche $\frac{1}{6}$ mit $\frac{1}{2}$!

(Geschieht vom Schüler ohne Hülfe.)

Vergleiche $\frac{1}{6}$ mit $\frac{1}{4}$!

(Löst der Schüler beide in 24stel auf, so merkt er bald, daß es noch einfacher war, sie in Zwölftel aufzulösen.)

c. Worin kommen Halbe, Drittel, Viertel und Sechstel zusammen?

Welches ist der Unterschied von $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{8}$? von $\frac{1}{4}$ und $\frac{5}{6}$?

(Aufgaben sind leicht nach dem Vorhergegangenen zu bilden.)

In welchem Verhältnis steht 5 und 6?

($5=\frac{1}{6}\times6$, $6=\frac{1}{5}\times5$.)

Zeige, daß die Hälfte von 5 und 6 in demselben Verhältnis steht!

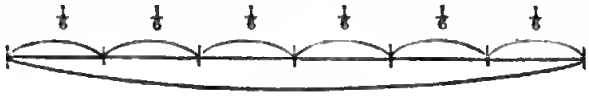
(Die Hälfte von $5=2\frac{1}{2}$; die Hälfte von $6=3$. Da $2\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$, $3=\frac{6}{12}$, so verhalten sie sich wie 5 : 6. Folglich ist auch $2\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\times3$. $\frac{1}{6}\times3=\frac{3}{12}$, $\frac{1}{6}\times3=\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$).

3) a. Verwandele 25 Sgr. in einen Thalerbruch!

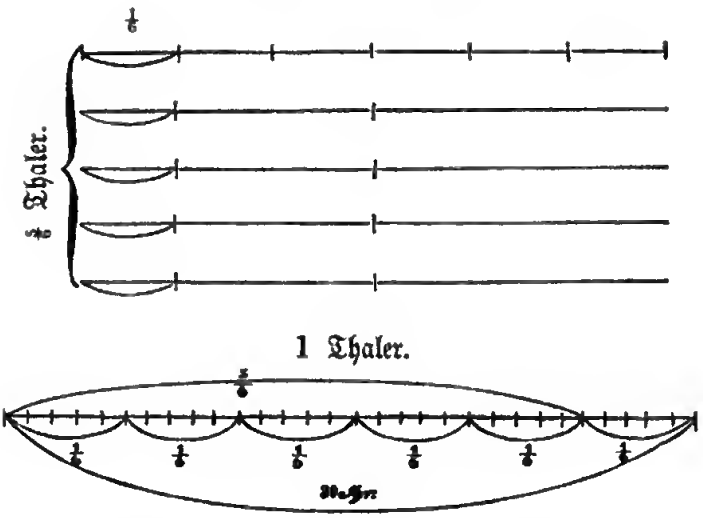
Da 1 Sgr. $=\frac{1}{30}$ Thlr., sind 25 Sgr. $=\frac{25}{30}$ Thlr. $=\frac{5}{6}$ Thlr.

Wie könnte der Bruch $\frac{5}{6}$ Thaler noch entstanden sein?

Wenn ich den 6ten Teil von 5 Thlrn. oder von 1 Thlr. 5 mal nehme.



1 Thaler.



1 Sgr.	= 1/30	Thlr.	9 Sgr.	= 3/10	Thlr.
2 „	= 1/15	„	10 „	= 1/3	„
3 „	= 1/10	„	11 „	= 11/30	„
4 „	= 2/15	„	12 „	= 2/5	„
5 „	= 1/6	„	13 „	= 13/30	„
6 „	= 1/5	„	14 „	= 7/15	„
7 „	= 7/30	„	15 „	= 1/2	„
8 „	= 4/15	„		ꝛc.	

In ähnlicher Weise mit Kreuzern und Gulden, Scheffeln und Wispeln.

b. Wenn man für 1/4 Thlr. 1 Elle kauft, wie viel erhält man für 1/8 Thlr.?

Viertel und Sechstel kommen in Zwölfteln zusammen; 1/4 = 3/12, 1/6 = 1 1/2. Bekommt man für 1/12 Thlr. 1 Elle, so bekommt man für 1/12 Thlr. = den dritten Teil = 1/3 Elle, also für 1 1/2 Thlr. 10 mal 1/3 = 10/3 = 3 1/3 Elle.

Zwei sparsame Kinder legten von ihrem Taschengelde jeden Monat zurück A. 1/5 B. 1/6. Das Taschengeld des A. betrug 2/3 Gulden, des B. 2/3 Gulden; wie viel hatte B. am Ende des Jahres mehr zurückgelegt als A.?

A. legte jeden Monat 1/15 Gulden, B. 1/10 Gulden zurück; im Jahr = 12 Monate legte also B. 12 × 1/10 G. = 12/10 = 6/5 = 1 1/5 G. zurück, und A. 12 × 1/15 = 12/15 = 4/5 = 1 4/5 G. Folglich hatte A. 2/3 G. mehr zurückgelegt als B.

Sechste Stufe.

Siebentel lassen sich weder in Halben, noch in Dritteln, Vierteln ꝛc. ausdrücken, denn weder 2 noch 3 ꝛc. geht in 7 ohne Rest auf. Welche Zahlen gehen in 8, in 9 ohne Rest auf? Was folgt daraus für die Achtel, Neuntel? — Ohne alle Schwierigkeiten vergleichen nun die Schüler Siebentel und Sechstel ꝛc., Siebentel und Achtel, Achtel und Neuntel ꝛc., und lösen entsprechende Aufgaben. Reduktionen wie folgende:

1 Quart hat nahezu 1 1/4 Liter. Folglich hat 1 Quart 8 Teile wie das Liter 7. Das Liter ist also 1/7 Quart.

Quart und Liter verhalten ſich alſo wie welche ganze Zahlen?
1 Tonne Bier hat 1½ Hektoliter. Wie viel Tonnen demnach 1 Hektoliter?
Antw.: ⅔ Tonnen.

Anwendung auf die Vielfachen.

Ich meine, daß wir für die Grundlegung an dieſen ſechs Stufen vollkommen genug haben.

Dies wäre etwa die Arbeit des erſten Halbjahres. Es folgt nun

Vierten Jahres

Zweites Semeſter.

Die Spezies in Brüchen.

(Regelrechnen.)

Während das Rechnen im erſten Semeſter ein ſtatariſches war, wird es nun im zweiten Semeſter ein kurſoriſches. Nachdem der Schüler dort in ſeiner allſeitigen Anſchauung des Bruches auf heuriſtiſchem Wege ſämmtliche Operationen des Bruchrechnens gewonnen hat, kommt es nun darauf an, den gewonnenen Stoff nach ſeinen *einzelnen* Seiten (in specie) zu verarbeiten, die *Operation als ſolche* zur Fertigkeit zu bringen. Darum folgt *nun mehr* die bekannte Einteilung:

1) Weſen und Behandlungsart des Bruches überhaupt (Erklärung der Teile, Arten ꝛc. des Bruches, Erweitern, Heben, Generalnenner ſuchen ꝛc.).
2) Reſolution,
3) Reduktion,
4) Addition,
5) Subtraktion,
6) Multiplikation,
7) Diviſion,

} in unbenannten und benannten Zahlen — mündlich und ſchriftlich.

Dieſes Spezies rechnen geht aber nun ohne alle Schwierigkeit von Statten, weil die Kraft dafür bereits intenſiv gebildet iſt.

Ich mache nur noch auf folgende Punkte aufmerkſam:

1. *Die Einheit.*

Der Schüler hat bereits oben angeſchaut und geſprochen: „Wenn ich die 1 in 4 gleiche Teile zerlege, ſo heißt einer dieſer Teile *ein Viertel*."

Drei Viertel ſind 3 von den 4 gleichen Teilen, in die ich die 1 geteilt habe.

Nun fahre man fort:

Du kannſt dir unter der 1 jede beliebige Größe denken, die in eine beſtimmte Anzahl gleiche Teile geteilt iſt; z. B. eine Elle, einen Centner.

Zeichne mir ¼ Elle, ¾ Ellen!

Um b zu erhalten, muß man erſt was haben?

Was bedeutet a?

Inſofern man durch die Teilung eine Vielheit von Teilen ($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1) gewinnt, nennt man das Ganze die Einheit. Der Thaler beſteht aus 30 Silbergroſchen; dieſe bilden eine Vielheit von jener Einheit, die ich wie nenne?

Welche Größe heißt Einheit?

Was iſt die Einheit?

Welche Größe bildet in unſerer Figur die Einheit?

Antw.: Die Elle.

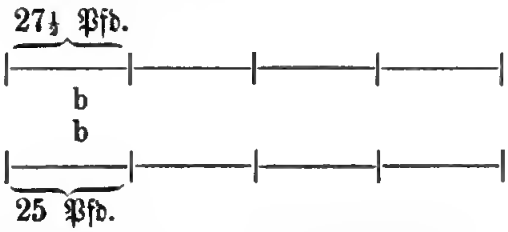
Denken wir uns unter dem a 1 Centner als Einheit, wie viel beträgt da b, c? ($\frac{1}{4}$ Ctr., $\frac{1}{3}$ Ctr.)

Wie viel Pfunde würden auf b, c kommen?

Wenn b = 25 Pfd. geſetzt würde, wie groß müßte da die Einheit ſein?

In Preußen war b = $27\frac{1}{2}$ Pfd.

In Oeſtreich iſt b = 25 Pfd.



Wie viel Pfund hat alſo der preußiſche Centner, und wie viel der öſtreichiſche Centner?

Die Zahl, mit welcher ich die Einheit bezeichne, iſt die 1.

Welche Zahlen nennen mir die Teile der Einheit?

Was ſind Bruchzahlen?

Wie verhält ſich ein ächter Bruch zur Einheit?

Welche Bruchzahl iſt eben ſo groß als die Einheit?

Die, welche mir alle Teile nennt, in die ich die Einheit zerlegt habe.

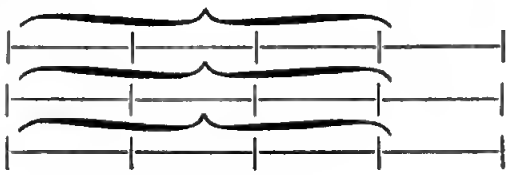
Drücke die Einheit in Dritteln, Vierteln, Tauſendſteln aus!

Der Übergang vom ächten Bruch zum unächten Bruch und zur gemiſchten Zahl iſt leicht.

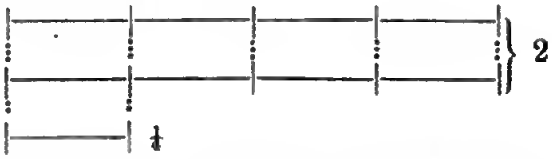
2. Erweitern und Verkürzen.

Wenn du $\frac{1}{4}$ mit 3 multiplizierſt, ſo erhälſt du wie wie viel?

Zeichne das!



Verwandle die $\frac{1}{4}$ in Ganze.



Welche Zahl haſt du nur multipliziert, und welche Zahl des Bruches iſt unverändert geblieben?

Wie verhält ſich $\frac{1}{4}$ zu $\frac{3}{4}$? ($\frac{3}{4}$ iſt das Dreifache von $\frac{1}{4}$.)

Wenn ich den Zähler eines Bruches mit 3, 5, 10 ꝛc. multipliziere, wird der Wert des Bruches? (um 3, 5, 10 mal größer.)

Nun wollen wir den Zähler unverändert laſſen, und den Nenner 4 dreimal nehmen. Wie heißt jetzt der Bruch?

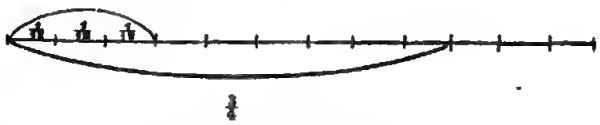
Wie verhält ſich der Wert von $\frac{1}{4}$ zu dem von $\frac{1}{12}$?

Jener iſt dreimal größer, dieſer dreimal geringer.

Wenn ich den Nenner 4 mit 3 multipliziere, ſo iſt das eben ſo viel, als wenn ich von dem Bruche welchen Teil ſuche?

Alſo mit welcher Zahl dividiere?

Zeichne das!



Wenn ſich 3 in $\frac{1}{4}$ teilen, bekommt jeder $\frac{1}{12} = \frac{1}{4}$.

Was müßte geſchehen, wenn aus dem $\frac{1}{12}$ oder $\frac{1}{4}$ wieder der erſte Wert $\frac{1}{4}$ gewonnen werden ſollte?

Welchen Einfluß hat es alſo auf den Wert des Bruches, wenn ich Zähler und Nenner mit derſelben Zahl multipliziere?

u. ſ. f.

3. Der Generalnenner.

Das Suchen des gemeinſchaftlichen oder Generalnenners wird in den meiſten Rechenbüchern ſehr mechaniſch beigebracht und doch iſt es eine Operation, die es verdiente, daß ſich der Schüler Etwas dabei denkt und deren Erklärung auch ſehr einfach iſt.

Den „Generalnenner" ſuchen heißt aber nicht bloß den „allgemeinen" Nenner ſuchen, in welchem die verſchiedenen gegebenen Nenner ohne Reſt aufgehen (dazu bedürfte es bloß des Multiplizierens aller Nennerzahlen), ſondern es heißt die kleinſte Zahl ſuchen, in welcher die Nenner ſämmtlicher vorhandener Brüche aufgehen. Dieſes kleinſte Vielfache wird gefunden, wenn man auf die Grundfaktoren derjenigen Zahlen zurückgeht, für die es gefunden werden ſoll.

Der Schüler weiß bereits, daß Halbe und Drittel in Sechsteln, Drittel und Viertel in Zwölfteln zuſammenkommen; er hat die Halben in 3 Teile, die Drittel in 4 Teile geteilt, alſo die Nenner miteinander multipliziert. Frage ich nun, worin kommen Viertel und Sechstel zuſammen,

so wird die Antwort leicht erfolgen „in Vierundzwanzigsteln"! Aber der Schüler findet bald, daß Viertel und Sechstel in Zwölfteln zusammenkommen. Warum das?

$$4 = 2 . 2$$
$$6 = 3 . 2$$

Beide Zahlen, 4 und 6 haben einen gleichen Faktor, die 2; mit diesem kann ich die 6 ohne Rest teilen, denn die 6 ist ein Vielfaches der 2. Mit $2 \cdot 2$ geht das aber nicht, das geschieht erst dann, wenn ich die 6 mit diesem andern Faktor 2 multipliziere, 2×6 oder $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$, und 12 ist ein Vielfaches der 4 sowohl (3×4 oder $3 \cdot 2 \cdot 2$) als der 6 (2×6 oder $2 \cdot 3 \cdot 2$).

$$15 = 5 \cdot 3$$
$$18 = 6 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$
$$9 = 3 \cdot 3$$

Durch den Faktor 3 sind die Zahlen 15, 18 und 9 mit einander verwandt. Da der Faktor 3 von der 15 bereits in der 18 enthalten, so finde ich das kleinste Vielfache von 15 und 18 als $5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$. Da ferner die $9 = 3 \cdot 3$ ist, diese Faktoren aber schon in der 18 ($2 \cdot 3 \cdot 3$) enthalten sind, so ist 18 selbst das kleinste Vielfache von 18 und 9, mithin braucht für 9 kein anderes Vielfache als das von 15 und 18 gesucht zu werden, also kommen 15tel, 18tel, 9tel in 90steln zusammen.

Die Zahlen 30 und 42 sind verwandt durch den Faktor 6, und da $6 = 2 \cdot 3$, auch durch die Faktoren 2 und 3.

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$
$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

Da die Faktoren $2 \cdot 3$ schon in der 42 stecken, brauche ich bloß $5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 5 \cdot 42 = 210$ zu nehmen, um das kleinste Vielfache für 30 und 42 zu bekommen. Dieselbe Zahl erhalte ich, wenn zerlegt wird:

$$\left.\begin{matrix} 30 = 5 \cdot 6 \\ 42 = 7 \cdot 6 \end{matrix}\right\} \; 5 \cdot 7 \cdot 6 = 210$$

Sollen nun folgende Brüche zusammengezählt werden: $\frac{3}{35} + \frac{1}{15} + \frac{1}{11} + \frac{3}{105} + \frac{1}{3}$, so schreibe man in senkrechter Reihe die Nennerzahlen unter einander und ermittele für sie das kleinste Vielfache durch Zerlegung in die Faktoren.

$$3 \left\{\begin{matrix} 36 = 12 \cdot 3 \\ 15 = 5 \cdot 3 \\ 11 = 11 \\ 105 = 35 \cdot 3 \\ 3 = 1 \cdot 3 \end{matrix}\right.$$

Da die 3 in 36 als Faktor auch in 15, 105 und 3 enthalten ist, können wir letztere streichen, und haben bloß zu multiplizieren $12 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 35 \cdot 11$. Nun aber ergiebt sich wieder für 5 und 35 der gemeinschaftliche Faktor 5 (5 geht schon in 35 auf und braucht nicht mit 35 multipliziert zu werden).

$$5 \left\{ \begin{array}{l} 36 = 12 \cdot 3 \\ 15 = 3 = 1 \cdot 3 \\ 11 = 11 \\ 105 = 35 = 7 \cdot 5 \\ 3 = 1 \end{array} \right.$$

und es bleibt also bloß noch zu multiplizieren $12 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5$. Dasselbe Verfahren stellt sich kürzer also dar:

3	36, 15, 11, 105, 3	
5	12, 5, 11, 35, 1,	
	12, 1, 11, 7.	

Um bei größeren Zahlen schnell zu erkennen, mit welcher kleinsten sie ohne Rest sich teilen lassen, merke man:

1) Alle Zahlen, die mit einer 0 endigen, sind durch 2 und 5 teilbar, denn da $10 = 2 \cdot 5$, so sind beide Faktoren auch in jedem Vielfachen der 10 enthalten.

2) Alle Zahlen, die mit einer 0 oder 5 endigen, sind durch 5 teilbar, denn 5 geht in jedem Zehner und in sich selber auf.

3) Alle Zahlen, die mit einer 2, 4, 6 oder 8 sich endigen, sind durch 2 teilbar, weil alle Zehner durch 2 teilbar sind und jene Einer ebenfalls.

4) Alle Zahlen sind durch 3 teilbar, deren Ziffersumme durch 3 teilbar ist, z. B. 4365 hat zur Ziffersumme 18, ist also durch 3 teilbar, weil es die 18 ist. Denn $10 = 3 \cdot 3 + 1$, $100 = 3 \cdot 33 + 1$, $1000 = 3 \cdot 333 + 1$ u. s. f. Jeder Zehner, Hunderter ꝛc. durch 3 geteilt, giebt 1 zum Rest. Da nun so viele Einheiten zum Reste bleiben, als Zehner, Hunderter ꝛc. da sind, so braucht man die Menge jener Einheiten nur zusammenzuzählen, um die Teilbarkeit zu erfahren. Ist $100 = 3 \cdot 33 + 1$, so ist $500 = 5 \cdot [(3 \cdot 33) + 1] = (5 \cdot 99) + 5$; ist $10 = 3 \cdot 3 + 1$, so ist $70 = 7 \cdot 3 \cdot 3 + 1 = (7 \cdot 9) + 7$ ꝛc.

5) Alle Zahlen sind ohne Rest durch 9 teilbar, wenn ihre Ziffersumme durch 9 teilbar ist. Denn $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, $1000 = 999 + 1$. Die zu addierenden Einer richten sich nach der Menge der Tausender, Zehner, Hunderter ꝛc.

6) Alle Zahlen sind ohne Rest durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und 3 teilbar sind.

7) Alle Zahlen sind ohne Rest durch 8 teilbar, wenn die letzten 3 Ziffern durch 8 teilbar sind, z. B. $856224 = 856000 + 224$ $\frac{1000}{8} = 125$, also auch jedes Vielfache; $\frac{224}{8} = 28$, folglich ꝛc.

Ich empfehle als Uebung das Zerlegen größerer Zahlen in ihre kleinsten Faktoren*), z. B.

9680	2
4840	2
2420	2
1210	3
605	5
121	11
11	11

$9680 = 2 . 2 . 2 . 2 . 5 . 11 . 11.$

$2 : 9680 = 4840 \mid 4840 = 2 . 2420.$
$2 : 4840 = 2420 \mid 2420 = 2 . 1210.$
$2 : 2420 = 1210 \mid 1210 = 2 . 605.$
$5 : 1210 = 605 \mid 605 = 5 . 121.$
$11 : 605 = 11 \mid 121 = 11 . 11.$

Wären die Nenner 56, 80, 72, 126 gegeben, so könnte man diese Zahlen zerlegen:

56	2
28	2
14	2
7	7

$\mathbf{56} = 2.2.2.7.$

80	2
40	2
20	2
10	2
5	5

$\mathbf{80} = 2.2.2.2.5.$

72	2
36	2
18	2
9	3
5	3

$\mathbf{72} = 2.2.2.3.3.$

126	2
63	3
21	3
7	7

$\mathbf{126} = 2.3.3.7.$

2 . 2 . 2 . 7
2 . 2 . 2 . 2 . 5
2 . 2 . 2 . 2 . 3
2 . 3 . 3 . 7

Da die 2 . 2 . 2 der 56 schon in 80 stecken und auch in 72, können von beiden Zahlen diese Faktoren gestrichen werden. Da der Faktor 2 von der 80 in 126 steckt, kann auch dort die 2 gestrichen werden ꝛc. und es bleibt also

$2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 7 = 5040.$

8	~~56~~	~~80~~	~~72~~	126
9	7	10	~~9~~	~~126~~
7	~~7~~	10	1	~~14~~
	1	10		2

Da nun $8 = 2 . 2 . 2$
$9 = 3 . 3$
$10 = 2 . 5$
so kommen die obigen Faktoren 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 7.

*) Sehr brav ist auf diesen Punkt Rücksicht genommen in dem „Rationellen Rechenbuche für den Gewerbs- und Handelsstand" von Karl Winternitz. (Preßburg 1851.)

Wir haben dies Letztere nur wegen der Allseitigkeit der Anschauung mitgeteilt, die Hauptsache bleibt das sichere und wohlverstandene Suchen des Hauptnenners in der angegebenen einfachen Weise.

1. Zahlenverhältnisse in Bruchform.

In welchem Verhältnisse stehen die Zahlen 5 und 9?*)

Will ich das Verhältnis zweier Zahlen ausdrücken, so muß ich sie mit einander messen und zwar mit einerlei Maß. 5 und 9 haben aber kein anderes gemeinschaftliches Maß, als die 1. Ist nun $5 = 5 \times 1$, so ist $1 = \frac{1}{5} \times 5$ (1 mal der 5te Teil von 5) in Bezug auf die 5, und $\frac{1}{5} \times 9$ in Bezug auf die 9. Deshalb ist aber die 9 im Verhältnis zur 5 neunmal der fünfte Teil von 5, und 5 ist 5 mal der neunte Teil von 9.

5 und 9.

$5 = 5 \times 1$	$9 = 9 \times 1$
$1 = \frac{1}{5} \times 5$	$1 = \frac{1}{9} \times 9$

folglich

$$5 = \tfrac{9}{5} \times 9 \text{ und}$$
$$9 = \tfrac{5}{9} \times 5.$$

So ist das Verhältnis von 3 und 4:

$$3 = \tfrac{3}{4} \times 4,$$
$$4 = \tfrac{4}{3} \times 3.$$

Lege ich bei den Zahlen 3 und 9 die 1 als Maßstab an, so sage ich $3 = \frac{3}{9} \times 9$, $9 = \frac{9}{3} \times 3$; lege ich die 3 als Maßstab an, heißt es:

$$3 = \tfrac{1}{3} \times 9,$$
$$9 = 3 \times 3.$$

Anwendung:

5 Ellen kosten 4 Gulden, was 9 Ellen?

Aufl. Da 9 Ellen $= \frac{9}{5} \times 5$ Ellen, so kosten sie auch $\frac{9}{5} \times 4$ Gulden $= 4 \times \frac{9}{5}$ Gulden $= \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$ Gulden.

Da jeder Bruch ein Divisions-Exempel ist ($\frac{7}{8}$ heißt 8 sollen sich in 7 teilen) und jede Proportions-Aufgabe auf einen Divisor und einen Dividendus hinausläuft: so kann man füglich solche Aufgaben in Bruchform ausdrücken, und ich rate dazu, wenn ich auch nicht die pedantische Ausführlichkeit und Konsequenz von Scholz adoptieren möchte. Aber diese Bruchform hat unbestreitbar den Vorzug, daß sie die Genesis und Art der Lösung des Exempels dem Schüler am anschaulichsten vorstellt.

5 Ellen kosten 4 Gulden, was 9 Ellen?

Aufl. Angenommen, 1 Elle kostete 4 Gulden, so werden 9 Ellen 9×4 Gulden wert sein.

9×4.

Da aber nicht 1 Elle, sondern 5 Ellen 4 Gulden kosten, muß der Preis 5mal billiger werden, also

$$\frac{9 \times 4}{5} \text{ Gulden} = \tfrac{36}{5} = 7\tfrac{1}{5} \text{ Gulden}$$

betragen.

---

*) Weitere Ausführung des schon Geübten.

5 Pferde reichen mit ihrem Vorrat Heu 4 Tage, wie lange reichen mit demselben Vorrat 9 Pferde?

Aufl. Reichen 5 Pferde mit dem Heuvorrat 5 Tage, so würde 1 Pferd $1 \times 5 = 20$ Tage reichen, 9 Pferde den Vorrat schon im 9ten Teil der Zeit verzehren, also in $\frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}$ Tage. — Oder auch: Angenommen, 1 Pferd reichte mit dem Heu 4 Tage, so würden 9 Pferde nur $\frac{4}{9}$ Tage reichen. Da aber 5 Pferde mit jenem Vorrat auskommen, können auch die 9 Pferde 5 mal länger reichen, also

$$5 \times \tfrac{4}{9} \text{ Tage} = \frac{5 \times 4}{9} = \tfrac{20}{9} = 2\tfrac{2}{9} \text{ Tage.}$$

Diese Form übt nicht minder im Denken als der Proportionsansatz, und ist doch viel elementarischer.

Die Elementarschule hat genug geleistet, wenn sie ihre Schüler dahin bringt, einfache Exempel aus dem Leben schnell und sicher entweder durch Zurückführen auf die Einheit oder durch die Bruchform oder eine Verhältnisgleichung zu lösen, und zwar mit selbständiger Beobachtung, welche Form der Lösung der jedesmaligen Aufgabe am meisten zusagt. So würde ein Schüler, dem nach unserem Gange die Zahl 95 als 5×19 vor der Seele steht, bei einem Exempel wie: $6\frac{1}{4}$ Pfund einer Ware kosten 20 Thaler, was 95 Pfund? die Lösung also anpacken:

$6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$. Da $95 = 5 \times 19$, so sind 95 Pfund $= 15$ mal $\frac{25}{4}$ Pfund, kosten also 15 mal 20 Thaler $= 300$ Thaler.

Da sich Zahlen wie 288, 296, 348 ꝛc. leicht halbieren lassen, so kann bei der Vervielfachung durch 5 diese verdoppelt werde. Man rechnet also statt 5×288, 5×296, 5×348 leichter 10×144, 10×148, 10×174.

Beim Zurückführen auf die Einheit halte man auf senkrechte Reihen und möglichste Kürze.

$6\frac{1}{4}$	Pfd.	20 Thlr.
$\frac{1}{4}$	Pfd.	$\frac{20}{25}$ Thlr.
1	Pfd.	$\frac{80}{25} = 3\frac{5}{25}$ Thlr.
95	Pfd.	$285 + 15 = 300$ Thlr.

Man nehme immer zuerst eine Art der Auflösung, und bringe diese an vielen Beispielen zur Fertigkeit; dann aber nehme man einen Abschnitt des Exempelbuches vor, und stelle einen Wettkampf unter den kleinen Rechnern an, wer zuerst die dem individuellen Beispiel angemessenste Lösung findet. Das übt im Beobachten und macht selbständig.

Ist nun der Lehrer bis hierher treu unserem Gange gefolgt, so nehme er ein praktisches Rechenbuch, ich meine ein methodisch tüchtiges Exempelbuch zur Hand*), und seine Schüler werden schnell und sicher

*) Ich mache noch besonders aufmerksam auf die Aufgabensammlungen von E. Heutschel, A. Böhme, W. Adam und J. Menzel. Sehr bildend für die Lehrer ist von letzterem das Bruchrechnen „in seiner durch die Maß- und Gewichtsordnung bedingten Umwandlung" behandelt.

von Anfang bis zu Ende die Aufgaben lösen. Weil nach unserem Lehrgange der Lehrer selber zur Selbständigkeit gelangen muß, bedarf er keiner langen und breiten theoretischen Anweisungen und Handbücher. Übrigens möge er nicht glauben, alle Aufgaben des Exempelbuchs durchpeitschen zu müssen. Wo ein beobachtendes Anschauen gewonnen ist, bedarf es selbst für die Fertigkeit nicht einer großen Masse von Exempeln. **Nicht vielerlei, sondern viel!**

Druck von J. F. Starcke in Berlin.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY
BERKELEY

THIS BOOK IS DUE ON THE LAST DATE
STAMPED BELOW

Books not returned on time are subject to a fine of 50c per volume after the third day overdue, increasing to $1.00 per volume after the sixth day. Books not in demand may be renewed if application is made before expiration of loan period.

FEB 27 1917

50m·7,'16

YC 03855

YC 03855